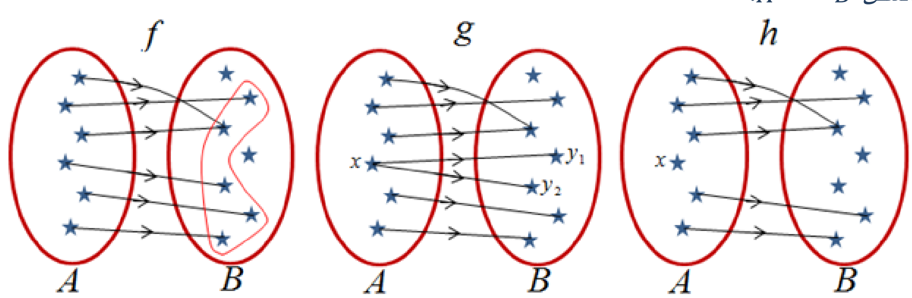
اسم المقرر: الرياضيات   رمز المقرر: PHR 104   مدرس المقرر: د. سلطان السلخدي

الفصل الأول

التكامل المحدد وغير المحدد

أولاً: التوابع الحقيقية بمتحول حقيقي واحد:

تعريف: *لتكن A و B مجموعتين غير خاليتين، نسمي كل علاقة f تربط كل عنصر من عناصر المجموعة A بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة B دالة منطلقه المجموعة A و مستقره المجموعة B، و نرمز لهذا الدالة بالشكل $f: A \to B$ أو بالشكل $A \xrightarrow{f} B$.*



لاحظ أن العلاقة f هي دالة، أما العلاقة g فهي ليست دالة لكون العنصر x في المنطلق يرتبط بعنصرين y_1،y_2 من المستقر، أما العلاقة h فهي ليست دالة لكون العنصر x في المنطلق لا يرتبط بأي عنصر من المستقر. نسمي العنصر y في المستقر الذي يرتبط به العنصر x من المنطلق، صورة العنصر x وفق الدالة f ونكتب $y = f(x)$. كما نسمي مجموعة العناصر من المستقر التي هي صور لعناصر من المنطلق، الصورة المباشرة للدالة أو المستقر الفعلي للدالة و نرمز له بالرمز:

$$I_f = f(A) = \{f(x): x \in A\} \subseteq B$$

لاحظ أن I_f هي مجموعة جزئية من المستقر B، كما هو مبين في مخطط الدالة f أعلاه.

تعريف: نقول عن دالة $f: A \to B$ أنه متباين إذا وفقط إذا كانت صور العناصر المختلفة في المنطلق A هي عناصر مختلفة في المستقر B، ونعبر عن ذلك رياضياً بشرط التباين التالي:

$$\forall x، y \in A \quad : \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

لاحظ أن الدالة f المبين في المخطط أعلاه، هو دالة غير متباين لوجود عنصرين في المنطلق لهما الصورة ذاتها في المستقر. كما يمكن جعل هذا الدالة متباين من خلال قصر تعريف الدالة على مجموعة جزئية من منطلق الدالة لا تحتوي على عناصر مختلفة لها الصورة ذاتها.

كما نقول أن الدالة غامر إذا و فقط إذا كانت جميع عناصر المستقر هي صور لعناصر المنطلق، أي أنه لا يوجد أي عنصر في المستقر غير مرتبط. ونعبر عن ذلك بشرط الغمر التالي

$$\forall y \in B \;\Rightarrow\; \exists x \in A \quad : \quad y = f(x)$$

لاحظ أن الدالة f المبين في المخطط أعلاه، هو دالة غير غامر لوجود عناصر في المستقر ليست صورة لأي عنصر من المنطلق. كما أنه يمكن جعل هذا الدالة غامراً إذا قصرنا مستقر الدالة على مستقره الفعلي، أي إذا عرفنا الدالة بالشكل $f: A \to I_f$.

كما نقول عن الدالة أنه دالة تقابل إذا وفقط إذا كانت متباينة وغامرة بآنٍ واحد.

تعريف: نقول عن دالة ما أنها دالة حقيقي إذا كانت مجموعة قيم الدالة (مستقرها الفعلي) هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. ونسمي كل دالة منطلقه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ دالة بمتحول حقيقي واحد، و كل دالة منطلقه مجموعة جزئية من المجموعة $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ دالة بمتحولين حقيقيين، و كل دالة منطلقه مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ دالة بثلاث متحولات حقيقية، و هكذا.

تجدر الملاحظة هنا إلى أننا سنرمز للمتحولات الحقيقية برموز من الشكل $x، y، z، \cdots$، أما التوابع فسنستخدم من أجلها رموزاً من الشكل $f، g، h، \cdots$. كما أننا سنهتم في هذا المقرر فقط بالتوابع الحقيقية بمتحول حقيقي واحد، أي التوابع التي منطلقها ومستقرها مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

ملاحظة: سنعرف دائماً الدالة من خلال قاعدة ربطه الرياضية، أي العلاقة التي تربط قيمة المتحول x (أو المتحولات $x، y، \cdots$) بالقيمة المقابلة للدالة $f(x)$ أو $(f(x، y، \cdots))$.

تعريف: نعرف مجموعة التعريف D_f للدالة f بأنها أكبر مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ (في حال كان الدالة بمتحول واحد) أو من $\mathbb{R}^n$ (في حال كان الدالة ذو n متحول) تكون قيمة الدالة معرفةً من أجل كل عنصر من عناصرها.

مثال: إذا رمزنا لنصف قطر دائرة بالرمز x، فإن مساحة هذه الدائرة S تعرف دالة f تعطى قاعدة ربطه الرياضية بالعلاقة $S = f(x) = \pi\, x^2$.

و إذا رمزنا للأبعاد الثلاثة لمتوازي مستطيلات بالرموز $x، y، z$، فإن حجمه V يعرف دالة f بثلاث متحولات حقيقية تعطى قاعدة ربطه الرياضية بالعلاقة $V = f(x، y، z) = x\, y\, z$.

العمليات الجبرية على التوابع بمتحول واحد

ليكن f و g دالتين معرفتين مجموعتي تعريفهما على الترتيب D_f و D_g. عندئذٍ يمكن أن نعرف العمليات الجبرية التالية على التوابع

1. مجموع الدالتين f و g والذي يعرف بالعلاقة $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$، ونلاحظ أن مجموعة تعريف الدالة تحقق العلاقة $D_{f+g}=D_f\cap D_g$.
2. جداء الدالتين f و g والذي يعرف بالعلاقة $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$، ونلاحظ أن مجموعة تعريف دالة الجداء تحقق العلاقة $D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g$.
3. ضرب الدالة f بعدد سلمي $\lambda\in\mathbb{R}$ والذي يعرف بالعلاقة $(\lambda f)(x)=\lambda\cdot f(x)$، ونلاحظ أن مجموعة تعريف الدالة هي $D_{\lambda f}=D_f$.
4. مقلوب الدالة g والذي يعرف بالعلاقة $\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{g(x)}$، ونلاحظ أن مجموعة تعريف مقلوب الدالة هي ذاتها مجموعة تعريف الدالة الأساسي باستثناء النقاط التي تعدم الدالة الأساسي، أي أن:
5. $D_{\frac{1}{g}}=D_g\backslash\{x;\ g(x)=0\}$.

إضافةً إلى العمليات الجبرية السابقة، يمكن أن نعرف عملية تركيب الدالتين f و g بالعلاقة $(f\circ g)(x)=f(g(x))$، وذلك بشرط أن تكون الصورة المباشرة للدالة g محتواة في مجموعة تعريف الدالة f، أي أن $I_g\subseteq D_f$. وبالتالي يمكن أن نكتب في الحالة العامة

$$D_{f\circ g}=D_g\backslash\{x\ ;\ g(x)\notin D_f\}$$

نبين في الجدول التالي قائمةً ببعض التوابع الأساسية الشهيرة بمتحول واحد التي تعرفنا عليها في المراحل الدراسية السابقة

اسم الدالة	قاعدة ربطه	مجموعة تعريفه	صورته المباشرة	أهم خواصه
الدالة الثابت	$f(x)=k$ حيث k أي عدد حقيقي ثابت	$\mathbb{R}$	$\{k\}$	
الدالة المطابق	$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
دالة القيمة المطلقة	$f(x)=\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\lvert x\rvert=\begin{cases}x\ ;\ x\geq 0\\ -x;\ x<0\end{cases}$ $\lvert x\cdot y\rvert=\lvert x\rvert\cdot\lvert y\rvert$ $\lvert x+y\rvert\neq\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$
دالة الجزء الصحيح	$f(x)=[x]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$	$[x\cdot y]\neq[x]\cdot[y]$ $[x+y]\neq[x]+[y]$

علیه تعليق [A1]:

	أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي x			
دالة الجذر التربيعي	$f(x)=\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$ $\sqrt{x\cdot y}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$ $\sqrt{x+y}\neq\sqrt{x}+\sqrt{y}$
الدالة الكسري الأساسي	$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\frac{1}{x\cdot y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}$ $\frac{1}{x+y}\neq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$
الدالة الأسي	$f(x)=e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$e^0=1$ $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ $e^{x+y}=e^x\cdot e^y$

إضافةً إلى التوابع الأساسية السابقة نعرف التوابع الجبرية (كثيرات الحدود والتوابع الكسرية) وهي توابع يمكن الحصول عليها بتطبيق عددٍ منتهٍ من العمليات الجبرية على الدالة المطابق.

نسمي كل دالة من الشكل $P(x)=a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+\cdots+a_n\,x^n$، حيث أن $n\in\mathbb{N}$ و $a_i\in\mathbb{R};\ \forall i$ و $a_n\neq 0$، كثيرة حدود من الدرجة n. لاحظ أن مجموعة تعريف أي دالة كثيرة حدود هي $\mathbb{R}$. وكحالة خاصة من كثيرات الحدود نأخذ دالة القوة التربيعية $f(x)=x^2$، والذي صورته المباشرة هي $\mathbb{R}^+$ ويتمتع بالخواص التالية:

$$(x\cdot y)^2=x^2\cdot y^2 \quad ، \quad (x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

كما نعرف الدالة الكسري بأنه كل دالة من الشكل $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$، حيث أن $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود ودرجة $Q(x)$ لا تساوي الصفر. وكحالة خاصة نأخذ الدالة الكسري الأساسي $f(x)=\frac{1}{x}$، المعرف على $\mathbb{R}^*$ والذي صورته المباشرة هي $\mathbb{R}^*$ ويتمتع بالخواص التالية

$$\frac{1}{x\cdot y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} \quad ، \quad \frac{1}{x+y}\neq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

تمارين:

1. عين مجموعة تعريف الدالتين $f(x)=e^{x^2}$ و $g(x)=\sqrt{1-x}$، ثم أوجد قاعدة ربط و مجموعة تعريف كلٍ من التوابع التالية

(i) $f+g$ **(ii)** $f-g$ **(iii)** $f\cdot g$ **(iv)** $f\circ g$ **(v)** $g\circ f$

2. عين مجموعة تعريف الدالتين $f(x) = e^{Ln(x-x^2)-2Ln(x)}$ و $g(x) = \frac{x-1}{x}$ ثم أثبت أن $f(x) = g(x); \forall x \in D_f$، ماذا تستنتج؟

3. أوجد مجموعة تعريف الدالة $f(x) = Ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ ثم أثبت أن $f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$ وأن $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2f(x)$.

4. أوجد مجموعة تعريف الدالة $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$ ثم أثبت أن $f\left(Sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = Sin(x)$.

5. ليكن $f(x) = 2x$ و $g(x) = x^2$ وليكن h أي دالة بمتحول واحد، أثبت أن $f \circ h = 2h$ وأن $g \circ h = h^2$.

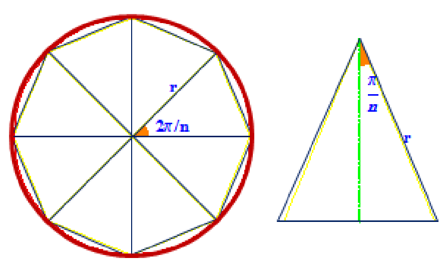
التوابع الحقيقية - النهايات و الاستمرار

نهاية دالة حقيقي بمتحول حقيقي واحد

يعتبر مفهوم النهايات من أهم مفاهيم علم الحساب التي تسهم في حل الكثير من المسائل الرياضية التي يتعذر حلها بالطرق الحسابية العادية المعروفة.

مثال: لحساب مساحة دائرة نصف قطرها r, نقوم برسم مضلع منتظم داخل هذه الدائرة عدد أضلاعه n و رؤوسه واقعة على محيط الدائرة, كما هو مبين في الشكل $(1-18)$.

لاحظ أن مساحة هذا المضلع S_P أصغر تماماً من مساحة الدائرة S_C, و مع ازدياد عدد أضلاع المضلع تزداد مساحة المضلع و تتقارب من مساحة الدائرة حتى إذا ما أصبح عدد الأضلاع لانهائياً أصبحت مساحة المضلع مساويةً لمساحة الدائرة، أي أن $S_C = \lim_{n\to\infty} S_P$.



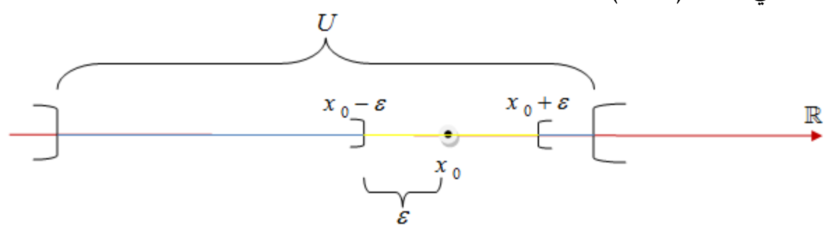
الشكل (18-1)

بملاحظة أن المضلع المنتظم ينقسم إلى n مثلث متساوي الساقين متطابقة زاوية رأس كلٍ منها $\frac{2\pi}{n}$ وطول كلٍ من ساقيه r, فإن مساحة كل مثلث تعطى بالعلاقة $S_T = \frac{r^2}{2} Sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. وبالتالي تصبح مساحة المضلع المنتظم $S_P = \frac{n}{2} r^2 Sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, و يكون

$$S_C = \lim_{n\to\infty} S_P = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{2} r^2 Sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right] = \pi r^2 \lim_{n\to\infty} \left[\frac{Sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}\right] \Rightarrow S_C = \pi r^2 \ .$$

حيث أننا قد استخدمنا لحساب النهاية الأخيرة النهاية الشهيرة $\lim_{x\to 0}\left[\frac{Sin(x)}{x}\right] = 1$.

تعريف: نسمي كل مجال مفتوح U يحتوي النقطة $x_0 \in \mathbb{R}$ جواراً في $\mathbb{R}$ للنقطة x_0. و يمكن بسهولة إثبات أنه من أجل أي جوار U للنقطة يوجد عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ يحقق أن المجال المفتوح $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ محتوى داخل الجوار U, كما هو مبين في الشكل (1-19)



الشكل (1-19)

تعريف: نهاية الدالة $f(x)$ عندما تنتهي قيمة المتحول إلى قيمة محددة x_0 هي القيمة المحددة، إن وجدت، التي تتقارب منها قيمة الدالة عندما تتقارب قيمة المتحول x من القيمة x_0. وهذا يعني أنه لا يشترط أن يكون الدالة معرفاً في النقطة x_0 لإيجاد هذه النهاية، إن وجدت، بل يكفي أن يكون الدالة معرفاً في جوار ما لهذه النقطة باستثناء هذه النقطة.

ملاحظة: في حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$, هناك احتمالان فقط للطريقة التي يمكن بها أن تنتهي قيمة المتحول x إلى النقطة x_0. فإما أن تنتهي قيمة المتحول x إلى x_0 بقيم أصغر من x_0, أي أن $x < x_0$, ونكتب $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ <}} f(x) = f^-(x_0)$ وتسمى النهاية اليسارية للدالة أو النهاية من اليسار. أو أن تنتهي قيمة المتحول x إلى x_0 بقيم أكبر من x_0, أي أن $x > x_0$, ونكتب $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ >}} f(x) = f^+(x_0)$ وتسمى النهاية اليمينية للدالة أو النهاية من اليمين. فإذا كانت $f^-(x_0) = f^+(x_0)$ قلنا أن الدالة $f(x)$ يملك نهاية عندما تنتهي قيمة المتحول إلى x_0, و تكون هذه النهاية مساوية للنهايتين اليمينية و اليسارية.

مثال: إن الدالة

$$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$$

غير معرف في النقطة $x_0 = 3$, إلا أننا سنثبت أن الدالة يملك النهاية 4 عندما تنتهي قيمة المتحول إلى القيمة $x_0 = 3$.

نلاحظ في الجدول المجاور أنه عندما تتقارب قيمة المتحول من القيمة $x_0 = 3$ من الأعلى و من الأدنى باتجاه منتصف الجدول فإن قيمة الدالة تتقارب من القيمة 4, و بالتالي فإننا نكتب

$$.\lim_{x\to 3} f(x) = 4$$

x	$\lvert x-3\rvert$	$f(x)$	$\lvert f(x)-4\rvert$
2.9	0.1	3.9	0.1
2.99	0.01	3.99	0.01
2.999	0.001	3.999	0.001
2.9999	0.0001	3.9999	0.0001
$x_0=3$	0	——	——
3.0001	0.0001	4.0001	0.0001
3.001	0.001	4.001	0.001
3.01	0.01	4.01	0.01
3.1	0.1	4.1	0.1

الجدول (1-1)

لاحظ أن المجال المفتوح $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ هو جوار للنقطة x_0 مركزه النقطة x_0 و نصف قطره ε, و أن

$$\begin{aligned}]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[&= \{x \in \mathbb{R} :\ x_0-\varepsilon < x < x_0+\varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} :\ -\varepsilon < x-x_0 < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} :\ |x-x_0| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

و بالتالي فإن التعبير الرياضي $|x-x_0| < \delta$ يعني أن النقطة x تنتمي إلى جوار النقطة x_0 الذي مركزه x_0 و نصف قطره δ. و كذلك التعبير الرياضي $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ يعني أن النقطة $f(x)$ تنتمي إلى جوار النقطة $f(x_0)$ الذي مركزه $f(x_0)$ و نصف قطره ε. و يمكن الآن وضع التعريف الرياضي لنهاية دالة كما يلي

نقول أن القيمة b هي نهاية الدالة $f(x)$ عندما تنتهي قيمة المتحول x إلى القيمة a, و نكتب $\lim_{x\to a} f(x) = b$, إذا و فقط إذا تحقق الشرط الرياضي التالي

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad : \quad |\, f(x) - b \,| < \varepsilon \,;\ |x-a| < \delta$$

و نقرأ هذا الشرط بالشكل التالي: من أجل أي عدد حقيقي موجب ε فإنه يوجد عدد حقيقي موجب $\delta(\varepsilon)$ (تتعلق قيمته عادة بقيمة ε) بحيث أن $|f(x)-b| < \varepsilon$ طالما أن $|x-a| < \delta$.

و بشكل آخر, من أجل أي جوار $N(b) = \{y :\ |\, y-b \,| < \varepsilon\}$ للنقطة b يوجد جوار $N(a) = \{x :\ |x-a| < \delta(\varepsilon)\}$, حيث أن $\delta(\varepsilon)$ عدد حقيقي موجب تتعلق قيمته بقيمة ε, بحيث يكون $f\big(N(a)\big) \subseteq N(b)$.

مثال: لنثبت رياضياً أن نهاية الدالة $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$ المعطى في المثال السابق تساوي 4 عندما تنتهي قيمة المتحول إلى 3, كما يلي

من أجل أي عدد حقيقي موجب ε يتوجب إيجاد عدد حقيقي موجب $\delta(\varepsilon)$ يحقق الشرط الرياضي للنهاية. فإذا كان العدد $\delta(\varepsilon)$ موجوداً تم المطلوب, و إلا فإن 4 لا تمثل نهاية للدالة المعطى عندما تنتهي قيمة المتحول إلى 3. لذلك نبدأ من الشرط الذي يتوجب تحققه و هو

$$|f(x)-4|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x^2-2x-3}{x-3}-4\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(x-3)(x+1)}{x-3}-4\right|<\varepsilon \Leftrightarrow |(x+1)-4|<\varepsilon\,;\ x\neq 3$$
$$\Leftrightarrow |x-3|<\varepsilon=\delta(\varepsilon)$$

و العلاقة الأخيرة تبين أنه طالما أن $|x-3|<\varepsilon$ فإن $|f(x)-4|<\varepsilon$, و بالتالي يكفي أن نضع $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$ لنضمن تحقق شرط النهاية. أي أن العدد $\delta(\varepsilon)$ موجود دائماً, و بالتالي نستنتج أن $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$.

النهايات غير المحدودة لدالة عددي:

نعلم أنه عندما تتقارب قيمة المتحول x من الصفر فإن قيمة المقدار $\left|\frac{1}{x}\right|$ تتزايد تدريجياً بشكل غير محدود و نقول عندئذٍ أن الدالة $\frac{1}{x}$ يسعى إلى اللانهاية. و نميز هنا الحالتين التاليتين

1. إما أن $x\xrightarrow{>}0$ و تكون قيم الدالة $\frac{1}{x}$ موجبة دائماً و نكتب عندئذٍ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x}=+\infty$
2. أو أن $x\xrightarrow{<}0$ و تكون قيم الدالة $\frac{1}{x}$ سالبة دائماً و نكتب عندئذٍ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{x}=-\infty$

بشكل عام, إذا تزايدت القيمة العددية للدالة $|f(x)|$ بشكل غير محدود عندما تتقارب قيمة المتحول x من a فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ في حال كانت قيم الدالة $f(x)$ موجبة, و نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ في حال كانت قيم الدالة $f(x)$ سالبة.

و نعبر رياضياً عن شرط تقارب الدالة $f(x)$ من $+\infty$ عندما تتقارب قيمة المتحول x من a بالشكل التالي

$$\forall M>0 \Rightarrow \exists\delta>0 \quad : \quad f(x)>M\,;\ |x-a|<\delta$$

كما نعبر رياضياً عن شرط تقارب الدالة $f(x)$ من $-\infty$ عندما تتقارب قيمة المتحول x من a بالشكل التالي

$$\forall N<0 \Rightarrow \exists\delta>0 \quad : \quad f(x)<N\,;\ |x-a|<\delta$$

نهاية دالة في اللانهاية (عند تزايد أو تناقص قيمة المتحول بشكل غير محدود):

إذا تقاربت قيمة الدالة $f(x)$ من قيمة محددة b عند تزايد قيمة المتحول x (قيم موجبة) بشكلٍ غير محدود عندئذٍ نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$.

أما إذا تقاربت قيمة الدالة $f(x)$ من قيمة محددة b عند تناقص قيمة المتحول x (قيم سالبة) بشكلٍ غير محدود فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$.

رياضياً, نقول أن الدالة $f(x)$ يسعى إلى قيمة محدودة b عندما يسعى المتحول x إلى $+\infty$, و نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$

, إذا و فقط إذا تحقق الشرط الرياضي التالي

$$\forall\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists M > 0 \quad : \quad |f(x) - b| < \varepsilon \,;\, \forall x > M$$

كما نقول أن الدالة $f(x)$ يسعى إلى قيمة محدودة b عندما يسعى المتحول x إلى $-\infty$, و نكتب $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$,

إذا و فقط إذا تحقق الشرط الرياضي التالي

$$\forall\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N < 0 \quad : \quad |f(x) - b| < \varepsilon \,;\, \forall x < N$$

ملاحظة: يمكن حساب نهاية دالة $f(x)$ عندما يسعى المتحول x إلى اللانهاية من خلال إجراء تغيير في المتحول من الشكل $y = \frac{1}{x}$, و عندئذٍ يكون

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y \xrightarrow{>} o} f(\tfrac{1}{y}) \quad \& \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y \xrightarrow{<} o} f(\tfrac{1}{y})$$

مثال: (نهاية دالة كسري صحيح)

لحساب نهاية دالة كسري صحيح $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$ عندما ينتهي المتحول إلى اللانهاية, نميز هنا الحالات الثلاثة التالية

1. إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام, أي أن $n > m$, نقسم البسط و المقام على x^m فنجد

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^{n-m} + a_{n-1}x^{n-m-1} + \cdots + a_2 x^{2-m} + a_1 x^{1-m} + a_0 x^{-m}}{b_m + b_{m-1}x^{-1} + \cdots + b_2 x^{2-m} + b_1 x^{1-m} + b_0 x^{-m}} = \frac{\mp\infty}{b_m} = \mp\infty$$

2. إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام, أي أن $n < m$, نقسم البسط و المقام على x^n فنجد

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n + a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_2 x^{2-n} + a_1 x^{1-n} + a_0 x^{-n}}{b_m x^{m-n} + b_{m-1}x^{m-n-1} + \cdots + b_2 x^{2-n} + b_1 x^{1-n} + b_0 x^{-n}} = \frac{a_n}{\mp\infty} = 0$$

3. إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام, أي أن $n = m$, نقسم البسط و المقام على $x^m = x^n$ فنجد

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n + a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_2 x^{2-n} + a_1 x^{1-n} + a_0 x^{-n}}{b_m + b_{m-1}x^{-1} + \cdots + b_2 x^{2-m} + b_1 x^{1-m} + b_0 x^{-m}} = \frac{a_n}{b_m}$$

قواعد حساب نهايات التوابع العددية:

يمكن دائماً تطبيق العمليات الجبرية المعروفة على الدالة المعطى من تحليل و اختزال و ضرب و جمع و قسمة و غيرها من العمليات الجبرية للمساعدة في حساب قيمة النهاية.

مثال: إذا حوت النهاية نسبة تحتوي في بسطها أو مقامها على جزء من مطابقة تربيعية مثل $\sqrt{f(x)} \mp \lambda$ عندئذٍ يمكن أن نضرب بسط و مقام النسبة بالجزء المتمم له لنحصل على مطابقة تربيعية كاملة يمكن فكها لتسهيل عملية حساب النهاية. لنوجد النهاية التالية

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}\frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4-4}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{1}{4}$$

تؤول معظم مسائل حساب النهايات إلى مسألة تعويض القيمة التي ينتهي إليها المتحول في عبارة الدالة المعطى بعد إجراء بعض العمليات الجبرية على الدالة. و تظهر هنا بعض الحالات التي تتطلب إجراءات إضافية أخرى لحساب النهاية لكون ناتج عملية التعويض لا يملك قيمة محددة. تسمى هذه الحالات حالات عدم التعيين و تتمثل في الحالات السبعة التالية

$$\infty^0\,,0^0\,,1^\infty\,,0\cdot\infty\,,\infty-\infty\,,\frac{\infty}{\infty}\,,\frac{0}{0}$$

سنقدم فيما يلي بعض المبرهنات التي سنقبلها بدون برهان و بعض النهايات المعروفة و الشائعة التي تساعد في حساب نهايات التوابع.

مبرهنة: (العمليات الجبرية على النهايات)

إذا كانت النهايتان $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودتان, فإن

1. $\lim_{x\to a}[f(x)\mp g(x)]=\lim_{x\to a}[f(x)]\mp\lim_{x\to a}[g(x)]$
2. $\lim_{x\to a}[\lambda\cdot f(x)]=\lambda\cdot\lim_{x\to a}[f(x)] \quad ; \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$
3. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}[f(x)]\cdot\lim_{x\to a}[g(x)]$
4. $\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)} \quad ; \quad \lim_{x\to a} f(x)\neq 0$

مبرهنة: (نهاية التوابع المركبة)

إذا كانت النهاية $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودة, و كان الدالة $f(x)$ معرفاً في النقطة $\lim_{x\to a} g(x)$,فإن

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

بعض النهايات الأساسية الشهيرة

تمثل هذه النهايات بعض حالات عدم التعيين الشهيرة و التي تمت إزالة عدم التعيين فيها, حيث يمكن اعتبارها قواعد لحساب النهايات المشابهة لها و هي

1. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=Ln(a)$
2. $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=n\,a^{n-1}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a \quad ; \quad a\neq 0$

4. $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \& \quad \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Sin(x)}{x} = 1$
6. $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{Ln(x+1)}{x} = 1$

تمارين: أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x} , \lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x^2-16} , \lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2+x}\right) , \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} , \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{Cos^2(x)}{1-Sin^3(x)} , \lim_{x\to 0}\frac{Tan(x)-Sin(x)}{x(1-Cos(2x))}$$

$$, \lim_{x\to 0}\frac{Sin(4x)}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}} , \lim_{x\to 0}\frac{a^{3x}-a^{2x}-a^{x}+1}{x^2} , \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{Sec^2(x)-2}{Tan(x)-1} , \lim_{x\to 0}\frac{Tan(x)}{x} , \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)Tan(x) ,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-Cos(5x)}{1-Cos(3x)} , \lim_{x\to 0}\frac{Tan(x+a)-Tan(a)}{5x} , \lim_{x\to\infty}\frac{(3x-1)(4x-2)}{(x+8)(x-12)} , \lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x}\right) ,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}} , \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2-3x+4}\right) , \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} .$$

استمرار التوابع الحقيقية بمتحول حقيقي واحد

تعريف: ليكن لدينا الدالة $f(x)$ المعرف على جوار ما للنقطة x_0. نقول أن الدالة $f(x)$ مستمر في النقطة x_0 إذا و فقط إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ موجودة و كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, أي أن $f^{+}(x_0) = f^{-}(x_0) = f(x_0)$.

و بشكل رياضي, نقول أن الدالة $f(x)$ مستمر في النقطة x_0 إذا و فقط إذا تحقق الشرط التالي

$$\forall \varepsilon > 0 \;\Rightarrow\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad : \quad |\, f(x) - f(x_0)\,| < \varepsilon \,;\; |x - x_0| < \delta$$

ملاحظة: إذا لم يكن الدالة مستمراً في النقطة قلنا أن الدالة منقطع في هذه النقطة مع ملاحظة أن منحني الدالة المستمر في نقطة ما يكون متصلاً في هذه النقطة و لا يعاني من انقطاع فيها.

مثال: لنثبت أن الدالة الأسي $f(x) = e^{x}$ هو دالة مستمر في أي نقطة $x_0 \in \mathbb{R}$, كما يلي

من أجل أي عدد حقيقي موجب ε نلاحظ أن

$$|\, e^{x} - e^{x_0}\,| < \varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad e^{x_0}|\, e^{x-x_0} - 1\,| < \varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad |e^{x-x_0} - 1| < \frac{\varepsilon}{e^{x_0}} \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^{x-x_0} - 1 < \frac{\varepsilon}{e^{x_0}} \;;\; x > x_0 \\ 1 - e^{x-x_0} < \frac{\varepsilon}{e^{x_0}} \;;\; x < x_0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x - x_0 < Ln\left(1+\frac{\varepsilon}{e^{x_0}}\right) \;;\; x > x_0 \\ x - x_0 > Ln\left(1-\frac{\varepsilon}{e^{x_0}}\right) \;;\; x < x_0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-x_0 < Ln\left(\frac{e^{x_0+\varepsilon}}{e^{x_0}}\right) \; ; \; x > x_0 \\ x_0 - x < Ln\left(\frac{e^{x_0}}{e^{x_0-\varepsilon}}\right) \; ; \; x < x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-x_0 < Ln\left(\frac{e^{x_0+\varepsilon}}{e^{x_0}}\right) \; ; \; x > x_0 \\ x_0 - x < -Ln\left(\frac{e^{x_0-\varepsilon}}{e^{x_0}}\right) \; ; \; x < x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-x_0| < Ln\left(\frac{e^{x_0+\varepsilon}}{e^{x_0}}\right) \; ; \; x > x_0 \\ |x-x_0| < Ln\left(\frac{e^{x_0}}{e^{x_0-\varepsilon}}\right) \; ; \; x < x_0 \end{cases}$$

فإذا وضعنا $\delta(\varepsilon) = Min\left\{Ln\left(\frac{e^{x_0+\varepsilon}}{e^{x_0}}\right), Ln\left(\frac{e^{x_0}}{e^{x_0-\varepsilon}}\right)\right\}$ و وضعنا $|x-x_0| < \delta(\varepsilon)$ تتحقق المتراجحتان في المعادلة الأخيرة, و يلزم حسب التكافؤات السابقة تحقق المتراجحة $|e^x - e^{x_0}| < \varepsilon$, و بالتالي يتحقق شرط الاستمرار.

تعريف: (استمرار دالة على مجال حقيقي)

1. نقول أن الدالة $f(x)$ مستمر على المجال المفتوح $]a,b[$إذا كان معرفاً على هذا المجال و مستمراً في كل نقطة من نقاط هذا المجال.
2. نقول أن الدالة $f(x)$ مستمر على المجال نصف المفتوح $]a,b]$ إذا كان معرفاً على هذا المجال و مستمراً في كل نقطة من نقاط المجال المفتوح $]a,b[$و كان $f^-(b) = f(b)$.
3. نقول أن الدالة $f(x)$ مستمر على المجال نصف المفتوح $[a,b[$إذا كان معرفاً على هذا المجال و مستمراً في كل نقطة من نقاط المجال المفتوح $]a,b[$و كان $f^+(a) = f(a)$.
4. نقول أن الدالة $f(x)$ مستمر على المجال نصف المغلق $[a,b]$ إذا كان معرفاً على هذا المجال و مستمراً في كل نقطة من نقاط المجال المفتوح $]a,b[$و كان

$$f^+(a) = f(a) \quad \& \quad f^-(b) = f(b)$$

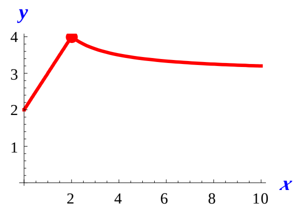
ملاحظة: جميع التوابع العددية المعروفة و توابع كثيرات الحدود و التوابع الكسرية الصحيحة مستمرة على مجموعة تعريف كل منها.

مثال: أدرس استمرار الدالة $f(x)$ على مجموعة تعريفه و المعرف بالشكل التالي

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & ; \quad 0 \le x < 2 \\ 4 & ; \quad x = 2 \\ \frac{3x+2}{x} & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

الحل: ندرس استمرار هذا الدالة على كل مجال جزئي من مجالات تعريفه و في نقاط تقطع مجال التعريف $[0,\infty[$كما يلي

على المجال $[0,2[$, نلاحظ أن $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ و هو دالة كسري صحيح معرف و مستمر على هذا المجال. و على المجال $]2,\infty[$, نلاحظ أن $f(x)=\frac{3x+2}{x}$ هو دالة كسري صحيح معرف و مستمر على هذا المجال.



الشكل (1−20)

أما في نقطة التقطيع $x_0=2$ فنلاحظ أن $f(2)=4$ و أن

$$\begin{cases} f^+(2)=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x+2}{x}\right)=4 \\ f^-(2)=\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4 \end{cases}$$

و بالتالي فإن $f(2)=f^-(2)=f^+(2)$, أي أن الدالة مستمر في هذه النقطة. و بالتالي نستنتج أن الدالة المعطى مستمر على كامل مجال تعريف الدالة $[0,\infty[$. و يتضح ذلك من منحني الدالة المبين في الشكل (1−20).

تمارين:

1. أدرس استمرار التوابع التالية على مجموعة تعريف كلٍ منها

$$f(x)=\begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2} & ; \quad x\neq 2 \\ 1 & ; \quad x=2 \end{cases} \quad , \quad f(x)=\begin{cases} \frac{Sin^2(2x)}{x^2} & ; \quad x\neq 0 \\ 4 & ; \quad x=0 \end{cases} \quad ,$$

$$f(x)=|x|+|x-1|+|x-2| \quad , \quad f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & ; \quad x\neq 1 \\ 0 & ; \quad x=1 \end{cases} \quad .$$

2. عين النهايتين اليمينية و اليسارية للدالة $f(x)=\frac{2x+3Tan(x)}{x}$ في النقطة $x=0$. هل يمكن تمديد تعريف هذا الدالة ليصبح مستمراً في النقطة $x=0$ ؟

3. عين قيم الثوابت a و b في كلٍ من التوابع التالية لتكون مستمرة على $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x+3} & ; \quad x\neq -3 \\ a-x & ; \quad x=-3 \end{cases} \quad , \quad f(x)=\begin{cases} x^2+a & ; \quad x>1 \\ 2\sqrt{x^2+b} & ; \quad x<1 \\ 1 & ; \quad x=1 \end{cases}$$

مبرهنة: (خواص التوابع المستمرة)

إذا كان الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ مستمران في النقطة x_0, فإن الدالة $f(x) \mp g(x)$ و الدالة $\lambda \cdot f(x)$ حيث أن $\lambda \in \mathbb{R}$ و الدالة $f(x) \cdot g(x)$ و الدالة $\frac{1}{f(x)}$ حيث أن $f(x_0) \neq 0$ و الدالة $|f(x)|$ هي توابع مستمرة أيضاً في هذه النقطة.

مبرهنة: (تركيب التوابع المستمرة)

إذا كان الدالة $f(x)$ مستمراً في النقطة x_0 و كان الدالة $g(x)$ مستمراً في النقطة $f(x_0)$ فإن الدالة $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ هو دالة مستمر أيضاً في النقطة x_0.

مثال: لنثبت باستخدام الخواص السابقة أن الدالة $f(x) = |1 + x + |x||$ هو دالة مستمر على $\mathbb{R}$ كما يلي

نعلم أن الدالتين $g(x) = |x|$ و $h(x) = 1 + x$ هما دالتان مستمران على $\mathbb{R}$, و بالتالي فإن الدالة $h(x) + g(x) = 1 + x + |x|$ هو دالة مستمر على $\mathbb{R}$. و بما أن

$$(g \circ (h+g))(x) = g(h(x) + g(x)) = |1 + x + |x|| = f(x)$$

فإننا نستنتج حسب المبرهنة الأخيرة أن الدالة $f(x)$ المعطى هو دالة مستمر على $\mathbb{R}$.

تمارين:

باستخدام المبرهنتين الأخيرتين, أثبت استمرار التوابع التالية على مجموعات تعريفها

$$(x-1)e^{3x+2} - 1 \quad , \quad \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} \quad , \quad Tan|x| \quad , \quad e^x - Ln(x) \quad , \quad Ln|x+7| - Sin(x).$$

التوابع الحقيقية – الاشتقاق و التفاضل

تعريف (مشتق دالة): ليكن $f(x)$ دالة معرفاً و مستمراً على جوار ما للنقطة x_0 و لتكن x نقطة ما من هذا الجوار, و لنضع $\Delta x = x - x_0$ و $\Delta f = f(x) - f(x_0)$. فإذا كانت النهاية

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

موجودة و وحيدة, قلنا أن الدالة $f(x)$ قابل للاشتقاق في النقطة x_0 و نكتب عندئذٍ

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad ; \quad h = \Delta x.$$

مثال: أوجد مشتق الدالة $f(x) = Sin(x)$ في أي نقطة $x \in \mathbb{R}$ ؟

الحل: نستبدل في النهاية الموجودة في تعريف المشتق كل x_0 بالنقطة المراد حساب قيمة المشتق فيها و هي x في هذه الحالة و $f(x)$ بقيمته, ثم نحسب قيمة النهاية. لدينا

$$(Sin(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{Sin(x+h) - Sin(x)}{h}$$

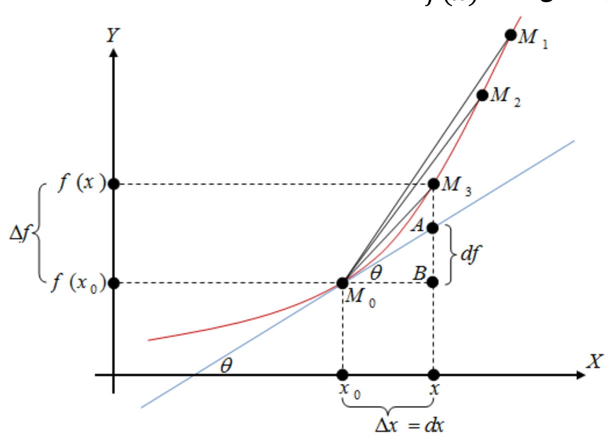
$$= \lim_{h\to 0} \frac{Sin(x)\,Cos(h)+Cos(x)\,Sin(h)-Sin(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{Sin(x)\,[Cos(h)-1]+Cos(x)\,Sin(h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left(Sin(x)\frac{Cos(h)-1}{h} + Cos(x)\frac{Sin(h)}{h}\right)$$
$$= Sin(x)\cdot \lim_{h\to 0}\left(\frac{Cos(h)-1}{h}\right) + Cos(x)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{Sin(h)}{h}$$
$$= Sin(x)\cdot 0 + Cos(x)\cdot 1 = Cos(x)$$

و بالتالي نستنتج أن $(Sin(x))' = Cos(x)$.

تعريف (تفاضل دالة): عندما يكون $|\Delta x| << 1$, سنضع $dx = \Delta x$ و سنضع $f'(x) = \frac{df}{dx}$, أي أن $df = f'(x)\cdot dx$. نسمي dx تفاضل المتحول x و نسمي df تفاضل الدالة $f(x)$.

المعنى الهندسي لمشتق و تفاضل دالة:

لنأخذ نقطة $M(x, f(x))$ دارجة على منحني الدالة $y = f(x)$, و لنفرض أن النقطة M كانت في الموضع M_1 المبين في الشكل (2−1). عندما تتقارب قيمة المتحول x من x_0 مروراً بالنقاط $M_1, M_2, M_3, \cdots$ فإن ميل القطعة المستقيمة M_0M يتقارب من ميل مماس منحني الدالة في النقطة x_0.



الشكل (2−1)

و بما أن ميل القطعة المستقيمة M_0M يعطى بالعلاقة $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ و ميل المماس في النقطة x_0 هو $Tan(\theta)$, فإن $Tan(\theta) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$. و بالتالي نستنتج أن مشتق الدالة في النقطة x_0 يمثل ميل مماس منحني الدالة في هذه النقطة.

و بملاحظة أن $\overline{AB} = Tan(\theta)\cdot\overline{M_0B} = f'(x_0)\cdot dx = df$, نستنتج أن تفاضل الدالة يمثل الفرق بين ترتيب النقطة M_0 و ترتيب نقطة من مماس منحني الدالة فاصلتها $x_0 + dx$. و بالتالي نجد أن $\Delta f \neq df$, إلا أن $\Delta f \approx df$ عندما تكون $|\Delta x| << 1$.

مبرهنة (خواص المشتقات):

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ دالةان قابلان للاشتقاق في النقطة x_0, عندئذٍ يكون

1. $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0) \quad ; \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$

2. $(f \mp g)'(x_0) = (f' \mp g')(x_0)$
3. $(f \cdot g)'(x_0) = (f' \cdot g + f \cdot g')(x_0)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}\right)(x_0) \quad ; \quad g(x_0) \neq 0$

مشتقات بعض التوابع الشهيرة:

1. $y = \lambda \quad \Rightarrow \quad y' = 0 \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$
2. $y = Sin(x) \quad \Rightarrow \quad y' = Cos(x) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $y = Cos(x) \quad \Rightarrow \quad y' = -Sin(x) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
4. $y = Sinh(x) \quad \Rightarrow \quad y' = Cosh(x) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
5. $y = Cosh(x) \quad \Rightarrow \quad y' = Sinh(x) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
6. $y = x^a \quad \Rightarrow \quad y' = a\, x^{a-1} \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^*$
7. $y = Ln(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$
8. $y = e^x \quad \Rightarrow \quad y' = e^x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

المشتقات الجزئية و التفاضل التام:

إذا كان $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ دالة بأكثر من متحول, ندعو مشتق هذا الدالة بالنسبة للمتحول x_i بعد اعتبار جميع المتحولات الأخرى ثابتة المشتق الجزئي للدالة بالنسبة للمتحول x_i و نرمز له بالرمز $f'_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. و بالتالي نكتب عبارة التفاضل التام للدالة بالشكل

$$\begin{aligned} df(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} \cdot dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n \end{aligned}$$

مثال: أكتب عبارة التفاضل التام للدالة $f(x, y, z) = x^2 Sin(y) + ye^z$ ؟

الحل: نحسب أولاً المشتقات الجزئية لهذا الدالة بالنسبة لجميع متحولاته كما يلي

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xSin(y) \quad , \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 Cos(y) + e^z \quad , \quad f'_z = \frac{\partial f}{\partial z} = ye^z$$

و تصبح عبارة التفاضل التام المطلوبة للدالة بالشكل

$$\begin{aligned} df(x, y, z) &= f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy + f'_z \cdot dz \\ &= 2x\, Sin(y) \cdot dx + (x^2\, Cos(y) + e^z) \cdot dy + ye^z \cdot dz \end{aligned}$$

القواعد العامة في اشتقاق التوابع:

1. **مشتق دالة الدالة (الدالة المركب):** إذا كان $y = f(x)$ و كان $z = g(y)$, أي أن $z = g(f(x))$, فإن $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = g'(y) \cdot f'(x)$. و بالتالي نستنتج أن

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

مثال: لإيجاد مشتق الدالة $z = Ln(f(x))$, نضع $g(y) = Ln(y)$ فيكون $z = g(f(x))$. و بتطبيق القاعدة السابقة نجد أن

$$\big(Ln(f(x))\big)' = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$
$$= Ln'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

بنفس الأسلوب يمكن إثبات علاقات مشابهة كالعلاقات التالية

$(Cos(f(x)))' = -Sin(f(x)) \cdot f'(x)$, $\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$, $([f(x)]^a)' = a\,(f(x))^{a-1} \cdot f'(x)$; $a \in \mathbb{R}^*$.

2. **مشتق الدالة الضمني:** إذا كان y دالة للمتحول x من خلال علاقة ضمنية من الشكل $f(x,y) = 0$, عندئذٍ و بمفاضلة طرفي العلاقة الضمنية نجد أن

$$f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} \quad ; \quad f'_y \neq 0}.$$

مثال: أوجد المشتق $\frac{dy}{dx}$ للدالة y المعرف بالعلاقة $x^2\, e^y - y\, Ln(2x+1) = Sin(y)$ ؟

الحل: نفاضل طرفي العلاقة الضمنية لنجد

$$d(x^2\, e^y) - d(y\, Ln(2x+1)) = d(Sin(y)) \quad \Rightarrow$$
$$2xe^y \cdot dx + x^2e^y \cdot dy - \left(Ln(2x+1) \cdot dy + y\frac{2}{2x+1} \cdot dx\right) = Cos(y) \cdot dy \quad \Rightarrow$$
$$(Cos(y) + Ln(2x+1) - x^2e^y) \cdot dy = \left(2xe^y - \frac{2y}{2x+1}\right) \cdot dx \quad \Rightarrow$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(2x+1)e^y - 2y}{(2x+1)(Cos(y) + Ln(2x+1) - x^2e^y)}.$$

3. **مشتق الدالة العكسي:** إذا كان $y = f^{-1}(x)$, فإن $x = f(y)$, و بمفاضلة طرفي العلاقة الأخيرة نجد أن $dx = f'(y) \cdot dy$, و بالتالي يكون $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$, أي أن

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

حيث أن $f(x)$ دالة قابلاً للاشتقاق في النقطة $f^{-1}(x)$ و أن $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.

مثال: أوجد مشتق الدالة $y = f^{-1}(x)$ حيث أن $f(u) = u^2\, Ln(e^u + 1)$ ؟

الحل: لدينا $x = f(y) = y^2\, Ln(e^y + 1)$, و بمفاضلة طرفي هذه العلاقة نجد

$$dx = d(y^2\, Ln(e^y + 1)) \quad \Rightarrow \quad dx = \left(2y\, Ln(e^y + 1) + y^2\, \frac{e^y}{e^y+1}\right) dy \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y+1}{2y(e^y+1)Ln(e^y+1)+y^2e^y}\,.$$

مثال: أوجد مشتق الدالة $y = ArcSin(x)$ ؟

الحل: لدينا حسب تعريف الدالة العكسي أن

$$x = Sin(y) \quad ; \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

و بمفاضلة طرفي هذه العلاقة نجد أن

$$dx = Cos(y) \cdot dy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{Cos(y)} \quad \Rightarrow$$

و بما أن $Cos(y) = \sqrt{1 - Sin^2(y)} = \sqrt{1 - x^2}$, نجد $\frac{d}{dx}(ArcSin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. **مشتق الدالة الوسيطي:** إذا كان $x = f(t)$ و كان $y = g(t)$, حيث أن $t \in \mathbb{R}$ وسيط ما, عندئذٍ نجد أن $dx = f'(t) \cdot dt$ و أن $dy = g'(t) \cdot dt$. و بالتالي فإن

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}}\,.$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$, حيث أن $x = 1 - Cos(t)$ و $y = 1 + Sin(t)$ ؟

الحل: بمفاضلة طرفي العلاقتين السابقتين نجد أن

$$dy = Cos(t) \cdot dt \quad , \quad dx = Sin(t) \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{Cos(t)}{Sin(t)} = Cot(t).$$

ملاحظة (استخدام اللوغاريتمات في الاشتقاق): يتعذر في بعض الأحيان حساب مشتق الدالة بالطرق العادية المباشرة, إلا أنه يمكن حساب مشتق لوغاريتم هذا الدالة و الاستفادة منه في حساب مشتق الدالة المطلوب.

مثال: لإيجاد مشتق دالة من الشكل $y = (f(x))^{g(x)}$, نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد $Ln(y) = g(x) \cdot Ln(f(x))$, ثم نشتق طرفي العلاقة بالنسبة للمتحول x فنجد أن

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \cdot Ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \Rightarrow$$

$$y' = \left[g'(x) \cdot Ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right] \cdot (f(x))^{g(x)}\,.$$

تمارين:

1. إذا كان $y = a\, Sin(x) + b\, Cos(x)$, أثبت أن $y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2 + b^2$ ؟
2. إذا كان $ArcTan\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = a$, فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{x(1-Tan(a))}{y(1+Tan(a))}$ ؟

3. إذا كان $y = \sqrt{Tan(x) + \sqrt{Tan(x) + \sqrt{Tan(x) + \cdots}}}$, فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{Sec^2(x)}{2y-1}$ ؟

4. إذا كان $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\left(\sqrt{x}\right)^{\left(\sqrt{x}\right)^{\cdot^{\cdot}}}}$, فأثبت أن $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2-yLn(x)}$ ؟

5. أثبت صحة العلاقات التالية

$\frac{d}{dx}(Tan(x)) = Sec^2(x)$, $\frac{d}{dx}(Sec(x)) = Sec(x)\cdot Tan(x)$, $\frac{d}{dx}(Cot(x)) = -Cosec^2(x)$, $\frac{d}{dx}(Cosec(x)) = -Cosec(x)\cdot Cot(x)$, $\frac{d}{dx}(ArcCos(x)) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{d}{dx}(ArcTan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$, $\frac{d}{dx}(ArcSec(x)) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $\frac{d}{dx}(ArcCot(x)) = \frac{-1}{1+x^2}$, $\frac{d}{dx}(ArcCosec(x)) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

6. أوجد مشتقات التوابع التالية

$Sinh(x^2+1)$, $Ln\left(\sqrt{1+e^x}\right)$, $Cos^2(1-3x)$, $Ln\left(1+e^{Cos(2x+1)}\right)$, $Tan\left(\sqrt{e^x+1}\right)$, $(1+Sin^2(5x+3))^{Ln(\sqrt{1+x^2})}$, $Sech(x)$, $Cosech(x)$, $Tanh(x)$, $Coth(x)$, $ArcSinh(x)$, $ArcCosh(x)$, $ArcTanh(x)$, $ArcCoth(x)$, $ArcSech(x)$, $ArcCosech(x)$.

7. أوجد المشتقات $\frac{dy}{dx}$ للتوابع في كلٍ مما يلي

$y = x^{Sin(x)}$, $y = \frac{3^x Sin(x)}{e^x ArcTan(x)}$, $y = Sin(x)^{Tan(x)} + Cos(x)^{Sec(x)}$, $x^a y^b = (x+y)^{a+b}$, $x^y = 3^{x-y}$, $\begin{cases} x = a\,Sin(t) \\ y = b\,Cos(t) \end{cases}$, $\begin{cases} x = t - Sin(t) \\ y = 1 - Cos(t) \end{cases}$, $\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^2} \\ y = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$, $\begin{cases} x = e^t\left(t+\frac{1}{t}\right) \\ y = e^{-t}\left(t-\frac{1}{t}\right) \end{cases}$, $\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$, $\begin{cases} x = ArcCos\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) \\ y = ArcSin\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \end{cases}$.

المشتقات و التفاضلات من المراتب العليا:

إذا كان $f(x)$ دالة قابلاً للاشتقاق على المجال $]a,b[$ و كان المشتق $f'(x)$ قابلاً للاشتقاق أيضاً على هذا المجال, فإننا نقول أن الدالة $f(x)$ يقبل الاشتقاق من المرتبة الثانية على هذا المجال و نكتب

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = (f')'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2f}{dx^2} .$$

بنفس الأسلوب نعرف المشتق $f^{(n)}$ من المرتبة n للدالة $f(x)$ عندما يكون $n > 2$. كما نصطلح أن نكتب $f^{(0)}(x) = f(x)$.

و في حال وجود المشتقات حتى المرتبة الثانية للدالة $f(x)$, نعرف التفاضل من المرتبة الثانية للدالة $f(x)$ بالشكل

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} \quad \Rightarrow \quad d^2f = f''(x)\cdot dx^2$$

بنفس الأسلوب نعرف التفاضل $d^n f$ من المرتبة n للدالة $f(x)$ عندما تكون $n > 2$ بالشكل

$$d^n f = f^{(n)}(x)\cdot dx^n$$

مثال: إذا كان $y = Sin(a\,x+b)$, و لنحاول إيجاد $y^{(n)}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}$ كما يلي

$$y^{(1)} = a\,Cos(a\,x+b) = a^1 Sin(a\,x+b+\tfrac{\pi}{2})$$
$$y^{(2)} = a^2 Cos(a\,x+b+\tfrac{\pi}{2}) = a^2 Sin(a\,x+b+\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi}{2}) = a^2 Sin(a\,x+b+2\tfrac{\pi}{2})$$
$$y^{(3)} = a^3 \mathrm{Cos}(a\,x+b+2\tfrac{\pi}{2}) = a^3 Sin(a\,x+b+3\tfrac{\pi}{2})$$

و هكذا نستنتج أن $y^{(n)} = a^n Sin(a\,x+b+n\tfrac{\pi}{2})\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}$.

تمارين:

1. أثبت صحة العلاقات التالية

(i) $[Cos(a\,x+b)]^{(n)} = a^n Cos(a\,x+b+n\tfrac{\pi}{2})\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}$

(ii) $[(a\,x+b)^m]^{(n)} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} a^n (a\,x+b)^{m-n}\ ;\ n\le m \\ 0 \qquad ;\ n > m \ge 0 \end{cases}$

(iii) $[(a\,x+b)^{-m}]^{(n)} = (-a)^n \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}(a\,x+b)^{-(m+n)}\ ;\ m>0$

2. إذا كان $y = A\,Sin(\alpha x) + B\,Cos(\alpha x)$, أثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0$.

3. إذا كان $y = 1 - Cos(t)\ , x = t - Sin(t)$, أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ ؟ (إرشاد: أحسب أولاً $\frac{dy}{dx}$ ثم لاحظ أن $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)/\frac{dx}{dt}$).

4. إذا كان $y = Sin(mt)\ , x = Sin(t)$, فأثبت أن $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2 y = 0$.

5. إذا كان $a\,x^2 + 2h\,xy + b\,y^2 = 1$, فأثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h^2-ab}{(hx+by)^3}$ ؟

6. إذا كان $y = e^x(Cos(x) + Sin(x))$, فأثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ ؟

7. إذا كان $y = Ln(Ln(x))$, فأثبت أن $x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ ؟

8. إذا كان $y = e^{ArcTan(x)}$, فأثبت أن $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x-1)\frac{dy}{dx} = 0$ ؟

9. إذا كان $y = A\,Cos(Ln(x)) + B\,Sin(Ln(x))$, فأثبت أن $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$.

بعض تطبيقات المشتقات و التفاضل:

1. استخدام المشتقات لإيجاد قيم تقريبية للتوابع:

بما أن Δf تمثل التغير الحقيقي في قيمة الدالة $f(x)$ المقابلة لتغير قيمة المتحول Δx في جوار النقطة x_0 و إذا كانت $|\Delta x|$ صغيرة بقدرٍ كافٍ, يمكن عندئذٍ استخدام العلاقة التقريبية $\Delta f \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$. و بما أن $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, تصبح العلاقة التقريبية بالشكل $\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x}$, حيث تستخدم هذه العلاقة لإيجاد قيم تقريبية للتوابع العددية.

مثال: لنعين قيمة تقريبية للدالة $Sin(x)$ في النقطة $x = \frac{\pi}{4} - 0.01$, كما يلي

لنضع $x_0 = \frac{\pi}{4}$ و $\Delta x = -0.01$, فيكون $Sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و يكون $(Sin(x))' = Cos(x)$. و بتطبيق العلاقة التقريبية للتوابع نجد أن

$$Sin(x_0 + \Delta x) \approx Sin(x_0) + Sin'(x_0) \cdot \Delta x \quad \Rightarrow$$
$$Sin\left(\frac{\pi}{4} - 0.01\right) \approx Sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + Cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot (-0.01) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{0.01}{\sqrt{2}} = \frac{0.99}{\sqrt{2}}$$

2. استخدام المشتقات في حساب معدلات تغير التوابع:

إذا كانت لدينا كمية y مرتبطة بكمية x بعلاقة من الشكل $y = f(x)$, فإن النسبة $y' = \frac{dy}{dx}$ تمثل معدل تغير اللحظي للكمية y بالنسبة لتغير الكمية x.

مثال: خزان ماء على شكل مخروط دوراني مقلوب ارتفاعه 8 أمتار و نصف قطر قاعدته متران, يتدفق الماء إلى الخزان بمعدل $\frac{1}{8}$ متراً مكعباً في الدقيقة. أحسب سرعة ارتفاع مستوى الماء في الخزان عندما كان ارتفاع الماء فيه 2.5 متراً.

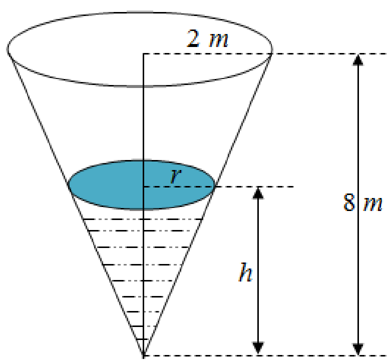
الحل: لنرمز لارتفاع مستوى الماء في الخزان بالرمز h و لنرمز لنصف قطر المخروط الذي يشكله الماء في الخزان بالرمز r, عندئذٍ يكون $\frac{r}{h} = \frac{2}{8}$ و يكون $r = \frac{h}{4}$.

يعطى حجم الماء في أي لحظة زمنية t بالعلاقة

$$V = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h = \frac{1}{3}\,\pi\,\left(\frac{1}{4}h\right)^2\, h = \frac{\pi}{48}\, h^3$$

و بالتالي فإن

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{48}\, 3h^2\, \frac{dh}{dt} = \frac{\pi}{16}\, h^2\, \frac{dh}{dt}$$



الشكل (2-2)

و لكن $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{8}$ و $h = 2.5$, و بالتالي نجد أن

$$\frac{1}{8} = \frac{\pi}{16}\,(2.5)^2\,\frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{8}{25\,\pi}$$

أي أن سرعة ارتفاع مستوى الماء في الخزان هو $\frac{8}{25\,\pi}$ متراً في الدقيقة.

3. استخدام المشتقات في تقدير الأخطاء:

بفرض أننا نريد قياس كمية ما مقدارها الحقيقي هو x و بسبب أخطاء القياس المختلفة ارتكبنا خطأً في القياس بحيث كانت قيمة القياس هي $x + \delta x$, حيث نسمي المقدار δx الخطأ المرتكب في قياس الكمية x. لاحظ أنه يمكن أن يكون هذا الخطأ مقداراً موجباً أو سالباً إلا أنه و لأسباب عملية كثيرة و مختلفة لا يمكن أن يكون معدوماً. نسمي أيضاً المقدار $|\delta x|$ الخطأ المطلق المرتكب في قياس الكمية x.

لنفرض الآن وجود كمية أخرى y مرتبطة بالكمية x بعلاقة من الشكل $y = f(x)$. إن أي خطأ في قياس الكمية x يؤدي إلى خطأ في تقدير الكمية y و يكون $y + \delta y = f(x + \delta x)$, حيث أن δy هو الخطأ الناتج في تقدير الكمية y المقابل للخطأ δx المرتكب في قياس الكمية x. و باستخدام علاقة التقريب نجد أن

$$y + \delta y = f(x + \delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\delta x = y + f'(x)\cdot\delta x \quad \Rightarrow$$

$$\delta y = f'(x)\cdot\delta x = \frac{dy}{dx}\cdot\delta x$$

أي أن $\frac{dy}{dx}\cdot\delta x$ هو الخطأ الناتج في تقدير y المقابل للخطأ δx المرتكب في قياس x.

ملاحظة: نسمي المقدار $\frac{\delta y}{y}$ الخطأ النسبي أما المقدار $100 \times \frac{\delta y}{y}$ فيسمى النسبة المئوية للخطأ المرتكب في تقدير الكمية y.

مثال: إذا علمت أن دور الحركة الاهتزازية T لنواس بسيط يعطى بدلالة طول النواس L بالعلاقة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, عين الخطأ النسبي المرتكب في تقدير الدور T المقابل لخطأ مرتكب في قياس الطول L, ماذا تستنتج ؟

الحل: لدينا

$$\delta T = \frac{dT}{dL}\cdot\delta L = \frac{d}{dL}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{L}\right)\cdot\delta L = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \times \frac{1}{2\sqrt{L}}\cdot\delta L = \frac{\pi}{\sqrt{gL}}\cdot\delta L$$

و بالتالي فإن الخطأ النسبي المرتكب في تقدير الدور يعطى بالشكل

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\frac{\pi}{\sqrt{gL}}\cdot\delta L}{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} = \frac{1}{2} \times \frac{\delta L}{L}$$

أي أن الخطأ النسبي في تقدير الدور يساوي نصف الخطأ النسبي المرتكب عند قياس طول النواس.

التوابع العددية – التكاملات غير المحددة

تعريف: نقول أن الدالة $F(x)$ هو دالة أصلي للدالة $f(x)$ على المجال $]a,b[$ إذا تحقق أن

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad ; \quad \forall x \in]a,b[$$

مثال: بملاحظة أن $\frac{d}{dx}[Sin(x)] = Cos(x) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$, فإننا نستنتج أن الدالة $Sin(x)$ هو دالة أصلي للدالة $Cos(x)$ على $\mathbb{R}$. و يمكن بسهولة ملاحظة أن أي دالة من الشكل $Sin(x) + a$ هو دالة أصلي للدالة $Cos(x)$ على $\mathbb{R}$ و ذلك من أجل أي عدد ثابت $a \in \mathbb{R}$, أي أن الدالة $Cos(x)$ يملك عدداً لانهائياً من التوابع الأصلية على كامل المجال الحقيقي $\mathbb{R}$.

تعريف: إذا كان $F(x)$ دالة أصلياً للدالة $f(x)$ على مجالٍ ما, فإننا نسمي العبارة $F(x) + C$, حيث أن C هو ثابت اختياري, التكامل غير المحدد للدالة $f(x)$ على المجال المعطى و نكتب

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

حيث نسمي الثابت الاختياري C ثابت التكامل.

ملاحظة: بما أن $F'(x) = f(x)$, يمكن أن نضع العبارة الأخيرة بالشكل

$$\int F'(x)dx = \int \frac{dF(x)}{dx} dx = \int dF(x) = F(x) + C$$

و باشتقاق طرفي العبارة في التعريف السابق بالنسبة للمتحول x نجد أن

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{dF(x)}{dx} + 0 = f(x)$$

التكاملات الأساسية لبعض التوابع الشهيرة:

نستنتج من العبارتين السابقتين أن التكامل غير المحدد هي العملية العكسية لعملية الاشتقاق. و بالتالي إذا فرضنا أن $u = u(x)$ هو دالة ما لمتحولٍ x و لنضع $u' = \frac{du}{dx}$, يمكن بشكل مباشر استنتاج التكاملات الأساسية التالية

1. $\int a\, dx = a\, x + C \quad ; \quad a \in \mathbb{R}$
2. $\int u^a\, u'\, dx = \frac{1}{a+1}\, u^{a+1} + C \quad ; \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
3. $\int a^u\, u'\, dx = \frac{a^u}{Ln(a)} + C \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^{+*}\backslash\{1\} \quad \Rightarrow \quad \int e^u\, u'\, dx = e^u + C$
4. $\int \frac{u'}{u} dx = Ln|u| + C$
5. $\int Cos(u)\, u'\, dx = Sin(u) + C$
6. $\int Sin(u)\, u'\, dx = -Cos(u) + C$

7. $\int Sec^2(u)\, u'\, dx = \int \frac{u'}{Cos^2(u)} dx = Tan(u) + C$
8. $\int Cosec^2(u)\, u'\, dx = \int \frac{u'}{Sin^2(u)} dx = -Cot(u) + C$
9. $\int Cosh(u)\, u'\, dx = Sinh(u) + C$
10. $\int Sinh(u)\, u'\, dx = Cosh(u) + C$
11. $\int Sech^2(u)\, u'\, dx = \int \frac{u'}{Cosh^2(u)} dx = Tanh(u) + C$
12. $\int Cosech^2(u)\, u'\, dx = \int \frac{u'}{Sinh^2(u)} dx = -Coth(u) + C$
13. $\int \frac{u'}{1+u^2} dx = ArcTan(u) + C$
14. $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = ArcSin(u) + C$
15. $\int \frac{u'}{\sqrt{u^2+a\,u+b}} dx = Ln\left|u + \frac{a}{2} + \sqrt{u^2 + a\,u + b}\right| + C$

بعض خواص التكاملات غير المحددة:

1. من أجل اي عدد ثابت $a \neq 0$ و أي دالة $f(x)$ يكون

$$\int a\, f(x)dx = a\, \int f(x)dx$$

2. من أجل أي دالتين $f(x)\,, g(x)$ يكون

$$\int [f(x) \mp g(x)]dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx$$

مثال: أحسب كلاً من التكاملات التالية

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}} \quad , \quad \int \left(3e^{2x} - \frac{2}{5x+3}\right) dx \quad , \quad \int \left(\frac{x^2+1}{x^3+3x-2} + x\sqrt[4]{x}\right) dx$$

الحل:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}} = \int (2x+1)^{\frac{-1}{3}} dx = \frac{1}{2}\int (2x+1)^{\frac{-1}{3}} \times 2 \times dx$$
$$= \frac{1}{2}\int (2x+1)^{\frac{-1}{3}} (2x+1)' dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{-\frac{1}{3}+1} (2x+1)^{-\frac{1}{3}+1} + C$$
$$= \frac{3}{4}(2x+1)^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x+1)^2} + C$$

$$\int \left(3e^{2x} - \frac{2}{5x+3}\right) dx = 3\int e^{2x} dx - 2\int \frac{1}{5x+3} dx$$
$$= \frac{3}{2}\int e^{2x} \times 2 \times dx - \frac{2}{5}\int \frac{5}{5x+3} dx$$
$$= \frac{3}{2}\int e^{2x}(2x)' dx - \frac{2}{5}\int \frac{(5x+3)'}{5x+3} dx$$
$$= \frac{3}{2}e^{2x} - \frac{2}{5}Ln|5x+3| + C$$

$$\int\left(\frac{x^2+1}{x^3+3x-2}+x\sqrt[4]{x}\right)dx=\int\frac{x^2+1}{x^3+3x-2}dx+\int x\sqrt[4]{x}dx$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2+3}{x^3+3x-2}dx+\int x^{1+\frac{1}{4}}dx$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{(x^3+3x-2)'}{x^3+3x-2}dx+\int x^{\frac{5}{4}}dx$$
$$=\frac{1}{3}Ln|x^3+3x-2|+\frac{1}{\frac{5}{4}+1}x^{\frac{5}{4}+1}+C$$
$$=\frac{1}{3}Ln|x^3+3x-2|+\frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}}+C$$
$$=\frac{1}{3}Ln|x^3+3x-2|+\frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x}+C$$

الطرق الأساسية في التكامل:

استخدمنا في المثال السابق الطريقة المباشرة في إجراء التكامل و التي تعتمد على قوانين التكاملات الأساسية للتوابع الشهيرة و خواص التكامل التي قدمناها سابقاً. و سنقدم فيما يلي طريقتين غاية في الأهمية تساعدان في حساب التكاملات في الكثير من الحالات.

1. طريقة تغيير المتحول:

في حال كان المتحول x دالة لمتحول آخر t بعلاقة من الشكل $x=x(t)$، عندئذٍ يكون

$$\int f(x)dx=\int f(x)\frac{dx}{dt}dt=\int f(x(t))\,x'(t)\,dt$$

و بعد حساب التكامل الأخير بالنسبة للمتحول الجديد t نقوم بتعويض متحول التكامل الأساسي x للحصول على ناتج التكامل المطلوب.

مثال: أحسب التكاملات التالية

$$I_1=\int\frac{Cos(x)}{1+Sin^2(x)}\,dx \qquad I_2=\int\frac{x}{(x^2+3)\sqrt{x^2-1}}\,dx$$
$$I_3=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} \qquad I_4=\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}\,dx$$

الحل: لحساب التكامل الأول نفرض أن $Sin(x)=u$ فيكون $Cos(x)dx=du$ و يصبح التكامل المطلوب بالشكل

$$I_1=\int\frac{Cos(x)dx}{1+Sin^2(x)}=\int\frac{du}{1+u^2}=ArcTan(u)+C=ArcTan(Sin(x))+C$$

لحساب التكامل الثاني نفرض أن $\sqrt{x^2-1}=u$ فيكون $x^2-1=u^2$ و يكون $x^2=u^2+1$ و يكون $x\,dx=u\,du$ و يصبح التكامل بالشكل

$$I_2=\int\frac{x\,dx}{(x^2+3)\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{u\,du}{(u^2+1+3)u}=\int\frac{du}{u^2+4}=\frac{1}{4}\int\frac{du}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1}$$

و لحساب التكامل الأخير نفرض أن $\frac{u}{2}=t$ فيكون $du=2dt$ و يصبح التكامل بالشكل

$$I_2 = \frac{1}{4}\int\frac{2dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}ArcTan(t)+C = \frac{1}{2}ArcTan\left(\frac{u}{2}\right)+C$$
$$= \frac{1}{2}ArcTan\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}\right)+C$$

لحساب التكامل الثالث نستخدم تحويل أولر حيث نفرض أن $\sqrt{x^2+\alpha} = u - x$ فيكون $u = x+\sqrt{x^2+\alpha}$ و يكون

$$du = dx + \frac{2x\,dx}{2\sqrt{x^2+\alpha}} = \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha}}\right)dx = \frac{x+\sqrt{x^2+\alpha}}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx$$
$$= \frac{u}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$$

و بالتعويض في التكامل المطلوب نجد أن

$$I_3 = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \int\frac{du}{u} = Ln|u|+C = Ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C \quad \Rightarrow$$
$$\boxed{\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = Ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C}$$

يمكن اعتبار القانون السابق قانوناً أساسياً في التكامل.

لحساب التكامل الرابع نفرض أن $u = x^4$ فيكون $x^8 = u^2$ و يكون $x^3dx = \frac{1}{4}du$ و يصبح التكامل بالشكل

$$I_4 = \int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{4}ArcSin(u)+C = \frac{1}{4}ArcSin(x^4)+C$$

2. طريقة التكامل بالتجزئة:

ليكن $u = u(x)$ و $v = v(x)$ دالتين للمتحول x قابلين للاشتقاق, عندئذٍ نعلم أن

$$d(u\cdot v) = v\cdot du + u\cdot dv \quad \Rightarrow \quad u\cdot dv = d(u\cdot v) - v\cdot du \quad \Rightarrow$$
$$\int u\cdot dv = \int d(u\cdot v) - \int v\cdot du \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du}$$

يسمى القانون السابق قانون التكامل بالتجزئة. و بما أن $du = \frac{du}{dx}dx = u'(x)dx$ و كذلك $dv = \frac{dv}{dx}dx = v'(x)dx$, فإنه يمكن وضع القانون السابق بالشكل

$$\boxed{\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\,dx}$$

نستخدم قانون التكامل بالتجزئة السابق لحساب تكامل غير بسيط يمكن كتابة دالة التكامل فيه على شكل جداء $u\cdot v'$ لدالتين u و v', حيث نشترط لاستخدام هذا القانون أن يكون التكامل الناتج $\int v(x)\cdot u'(x)\,dx$ في الطرف الأيمن من قانون التكامل بالتجزئة السابق أبسط من التكامل الأساسي $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx$ المعطى. و يتحقق ذلك في حال تحقق ما يلي

1. سهولة مكاملة الدالة $v'(x)$ لاستنتاج الدالة الأصلي $v(x)$ لاستخدامه في الطرف الأيمن من قانون التكامل بالتجزئة السابق.

2. أن يكون شكل الدالة المشتق $u'(x)$ أبسط من شكل الدالة الأساسي $u(x)$ أو مشابه له على الأقل. و يتحقق ذلك على الأغلب في الحالات التي يكون فيها الدالة $u(x)$ كثيرة حدود أو دالة دوري أو دالة أسي أو دالة لوغاريتمي.

مثال: أحسب التكاملات التالية

$$I_1 = \int 2^x x\,dx \qquad I_2 = \int x\,Ln(x)dx$$
$$I_3 = \int x^2 Sin(x)dx \qquad I_4 = \int ArcTan(x)dx$$

الحل: لحساب التكامل الأول نلاحظ أنه لا يمكن اختيار $v'(x) = x$ و $u(x) = 2^x$ لأنه في هذه الحالة يكون $v(x) = \frac{1}{2}x^2$ و يكون $u'(x) = 2^x Ln(2)$ و يصبح التكامل الناتج عن قانون التكامل بالتجزئة بالشكل $\frac{Ln(2)}{2}\int 2^x x^2\,dx$ و هو أكثر تعقيداً من التكامل الأساسي. لذلك نضع $v'(x) = 2^x$ و $u(x) = x$ و يكون $v(x) = \frac{1}{Ln(2)}2^x$ و $u'(x) = 1$ و نجد حسب قانون التكامل بالتجزئة أن

$$I_1 = \int 2^x x\,dx = (x)\left(\frac{2^x}{Ln(2)}\right) - \int\left(\frac{2^x}{Ln(2)}\right)(1)dx = \frac{2^x x}{Ln(2)} - \frac{1}{Ln(2)}\int 2^x dx$$
$$= \frac{2^x x}{Ln(2)} - \frac{1}{Ln(2)}\frac{2^x}{Ln(2)} + C = \frac{2^x x}{Ln(2)} - \frac{2^x}{(Ln(2))^2} + C$$

لحساب التكامل الثاني نلاحظ أنه لا يمكن اختيار $v'(x) = Ln(x)$ و $u(x) = x$ لأنه في هذه الحالة سيكون من الصعوبة استنتاج الدالة $v(x)$. لذلك سنضع $v'(x) = x$ و $u(x) = Ln(x)$ و يكون $v(x) = \frac{1}{2}x^2$ و $u'(x) = \frac{1}{x}$ و نجد حسب قانون التكامل بالتجزئة أن

$$I_2 = \int x\,Ln(x)dx = (Ln(x))\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \int\left(\frac{1}{2}x^2\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 Ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 Ln(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C = \frac{1}{2}x^2 Ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C$$

لحساب التكامل الثالث نلاحظ أنه لا يمكن اختيار $v'(x) = x^2$ و $u(x) = Sin(x)$ لأنه في هذه الحالة سيكون $v(x) = \frac{1}{3}x^3$ و يكون $u'(x) = Cos(x)$ و يصبح التكامل الناتج عن قانون التكامل بالتجزئة بالشكل $\frac{1}{3}\int x^3 Cos(x)dx$ و هو أكثر تعقيداً من التكامل الأساسي. لذلك سنضع $v'(x) = Sin(x)$ و $u(x) = x^2$ و سيكون $v(x) = -Cos(x)$ و $u'(x) = 2x$ و سنجد حسب قانون التكامل بالتجزئة أن

$$I_3 = \int x^2 Sin(x)dx = (x^2)(-Cos(x)) - \int(-Cos(x))(2x)dx = -x^2 Cos(x) + 2\int x\,Cos(x)dx$$

و لحساب التكامل الأخير نطبق قانون التكامل بالتجزئة من جديد حيث نفرض أن $v'(x) = Cos(x)$ و $u(x) = x$ و سيكون $v(x) = Sin(x)$ و $u'(x) = 1$ و سنجد أن

$$I_3 = -x^2 Cos(x) + 2[(x)(Sin(x)) - \int(Sin(x))(1)dx] = -x^2 Cos(x) + 2x\,Sin(x) - 2\int Sin(x)dx$$
$$= -x^2 Cos(x) + 2x\,Sin(x) - 2(-Cos(x)) + C = -x^2 Cos(x) + 2x\,Sin(x) + 2Cos(x) + C$$

لحساب التكامل الرابع نكتب التكامل بالشكل

$$I_4 = \int ArcTan(x)dx = \int 1 \times ArcTan(x)dx$$

و نلاحظ أنه لا يمكن اختيار $v'(x) = ArcTan(x)$ لأننا لا نعلم الدالة الأصلي لهذا الدالة, لذلك سنضع $v'(x) = 1$ و $u(x) = ArcTan(x)$ و سيكون $v(x) = x$ و $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ و سنجد حسب قانون التكامل بالتجزئة أن

$$I_4 = (ArcTan(x))(x) - \int (x)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx = x\,ArcTan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx$$
$$= x\,ArcTan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x\,ArcTan(x) - \frac{1}{2}Ln|1+x^2| + C$$

سنستعرض فيما يلي أهم نماذج التكامل التي نستخدم في حسابها طريقة التكامل بالتجزئة

النموذج الأول: استخدام طريقة التكامل بالتجزئة لحساب أي تكامل من الشكل

$$\int P(x)\cdot e^{ax+b}dx \quad , \quad \int P(x)\cdot Sin(ax+b)dx \quad , \quad \int P(x)\cdot Cos(ax+b)dx$$

حيث أن $P(x)$ هي كثيرة حدود من أي درجة n. و نفرض هنا أن $u = P(x)$ لنستفيد من كون $u' = P'(x)$ هي كثيرة حدود من درجة أقل من درجة كثيرة الحدود $P(x)$.

مثال: أحسب كلاً من التكاملات التالية

$$I_1 = \int (x+2)e^{2x+1}dx \qquad I_2 = \int (x^2-2x+5)Cos(x-1)dx$$
$$I_3 = \int (x^3-1)Sin(2x)dx \qquad I_4 = \int (\sqrt{x}+1)e^{\sqrt{x}}dx$$

الحل: لحساب التكامل الأول نضع $u = x+2$ و $v' = e^{2x+1}$ فيكون $u' = 1$ و يكون $v = \frac{1}{2}e^{2x+1}$, و يصبح التكامل بالشكل

$$I_1 = \int (x+2)e^{2x+1}dx = (x+2)\left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right) - \int\left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)(1)dx = \frac{1}{2}(x+2)e^{2x+1} - \frac{1}{2}\int e^{2x+1}dx$$
$$= \frac{1}{2}(x+2)e^{2x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right) + C = \frac{1}{2}(x+2)e^{2x+1} - \frac{1}{4}e^{2x+1} + C = \frac{1}{4}(2x+3)e^{2x+1} + C$$

لحساب التكامل الثاني نضع $u = x^2-2x+5$ و $v' = Cos(x-1)$ فيكون $u' = 2x-2$ و يكون $v = Sin(x-1)$, و يصبح التكامل بالشكل

$$I_2 = \int (x^2-2x+5)Cos(x-1)dx = (x^2-2x+5)(Sin(x-1)) - \int (Sin(x-1))(2x-2)dx$$
$$= (x^2-2x+5)Sin(x-1) - \int (2x-2)Sin(x-1)dx$$

و لحساب التكامل الأخير نطبق التكامل بالتجزئة مرة ثانية حيث نفرض أن $u = 2x-2$ و $v' = Sin(x-1)$ فيكون $u' = 2$ و يكون $v = -Cos(x-1)$, و يصبح التكامل بالشكل

$$I_2 = (x^2 - 2x + 5)Sin(x-1) - [(2x-2)(-Cos(x-1)) - \int(-Cos(x-1))(2)dx]$$
$$= (x^2 - 2x + 5)Sin(x-1) + (2x-2)Cos(x-1) - 2\int Cos(x-1)dx$$
$$= (x^2 - 2x + 5)Sin(x-1) + (2x-2)Cos(x-1) - 2Sin(x-1) + C \quad \Rightarrow$$
$$I_2 = (x^2 - 2x + 3)Sin(x-1) + (2x-2)Cos(x-1) + C$$

لحساب التكامل الثالث نضع $u = x^3 - 1$ و $v' = Sin(2x)$ فيكون $u' = 3x^2$ و يكون $v = -\frac{1}{2}Cos(2x)$, و يصبح التكامل بالشكل

$$I_3 = \int(x^3-1)Sin(2x)dx = (x^3-1)\left(-\frac{1}{2}Cos(2x)\right) - \int\left(-\frac{1}{2}Cos(2x)\right)(3x^2)dx$$
$$= -\frac{1}{2}(x^3-1)Cos(2x) + \frac{3}{2}\int x^2Cos(2x)dx$$

و لحساب التكامل الأخير نطبق التكامل بالتجزئة مرة ثانية حيث نفرض أن $u = x^2$ و $v' = Cos(2x)$ فيكون $u' = 2x$ و يكون $v = \frac{1}{2}Sin(2x)$, و يصبح التكامل بالشكل

$$I_3 = -\frac{1}{2}(x^3-1)Cos(2x) + \frac{3}{2}\left[(x^2)\left(\frac{1}{2}Sin(2x)\right) - \int\left(\frac{1}{2}Sin(2x)\right)(2x)dx\right]$$
$$= -\frac{1}{2}(x^3-1)Cos(2x) + \frac{3}{4}x^2Sin(2x) - \frac{3}{2}\int x\,Sin(2x)dx$$

و لحساب التكامل الأخير نطبق التكامل بالتجزئة مرة ثالثة حيث نفرض أن $u = x$ و $v' = Sin(2x)$ فيكون $u' = 1$ و يكون $v = -\frac{1}{2}Cos(2x)$, و يصبح التكامل بالشكل

$$I_3 = -\frac{1}{2}(x^3-1)Cos(2x) + \frac{3}{4}x^2Sin(2x) - \frac{3}{2}\left[(x)\left(-\frac{1}{2}Cos(2x)\right) - \int\left(-\frac{1}{2}Cos(2x)\right)(1)dx\right]$$
$$= -\frac{1}{2}(x^3-1)Cos(2x) + \frac{3}{4}x^2Sin(2x) + \frac{3}{4}x\,Cos(2x) - \frac{3}{4}\int Cos(2x)dx$$
$$= -\frac{1}{2}(x^3-1)Cos(2x) + \frac{3}{4}x^2Sin(2x) + \frac{3}{4}x\,Cos(2x) - \frac{3}{8}Sin(2x) + C \quad \Rightarrow$$
$$I_3 = \frac{1}{4}(2 + 3x - 2x^3)Cos(2x) + \frac{3}{8}(2x^2 - 1)Sin(2x) + C$$

لحساب التكامل الرابع نجري تغييراً في المتحول حيث نفرض أن $t = \sqrt{x}$ فيكون $x = t^2$ و يكون $dx = 2t\,dt$, و يصبح التكامل بالشكل

$$I_4 = \int(\sqrt{x}+1)e^{\sqrt{x}}dx = 2\int t(t+1)e^t dt = 2\int(t^2+t)e^t dt$$

و لحساب التكامل الأخير نطبق التكامل بالتجزئة حيث نفرض أن $u = t^2 + t$ و $v' = e^t$ فيكون $u' = 2t + 1$ و يكون $v = e^t$, و يصبح التكامل بالشكل

$$I_4 = 2[(t^2+t)(e^t) - \int(e^t)(2t+1)dx] = 2(t^2+t)e^t - 2\int(2t+1)e^t dx$$

و لحساب التكامل الأخير نطبق التكامل بالتجزئة مرة ثانية حيث نفرض أن $u = 2t + 1$ و $v' = e^t$ فيكون $u' = 2$ و يكون $v = e^t$, و يصبح التكامل بالشكل

$$I_4 = 2(t^2+t)e^t - 2[(2t+1)e^t - \int (e^t)(2)dx]$$
$$= 2(t^2+t)e^t - 2(2t+1)e^t + 4\int e^t dx = (2t^2-2t+2)e^t + C \quad \Rightarrow$$
$$I_4 = \left(2x - 2\sqrt{x} + 2\right)e^{\sqrt{x}} + C$$

النموذج الثاني: استخدام طريقة التكامل بالتجزئة لحساب أي تكامل من الشكل

$$\int P(x)\cdot ArcSin(ax+b)dx \quad , \quad \int P(x)\cdot ArcCos(ax+b)dx$$
$$\int P(x)\cdot ArcTan(ax+b)dx \quad , \quad \int P(x)\cdot ArcCot(ax+b)dx$$
$$\int P(x)\cdot Ln(ax+b)dx$$

حيث نفرض أن $v' = P(x)$ لنستفيد من كون مشتقات التوابع الأخرى في هذه التكاملات هي توابع كسرية ليتحول التكامل المعطى إلى تكامل دالة كسري سنناقشه بشكلٍ تفصيلي فيما بعد.

مثال: أحسب كلاً من التكاملات التالية

$$I_1 = \int ArcSin(x)dx \qquad\qquad I_2 = \int x\,Ln(x)dx$$

الحل: لحساب التكامل الأول نضع $u = ArcSin(x)$ و $v' = 1$ فيكون $u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ و يكون $v = x$, و يصبح التكامل بالشكل

$$I_1 = \int ArcSin(x)dx = (ArcSin(x))(x) - \int (x)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$
$$= x\,ArcSin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\,ArcSin(x) + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$= x\,ArcSin(x) + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2)'dx = x\,ArcSin(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\right)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= x\,ArcSin(x) + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C = x\,ArcSin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

لحساب التكامل الثاني نضع $u = Ln(x)$ و $v' = x$ فيكون $u' = \frac{1}{x}$ و يكون $v = \frac{1}{2}x^2$, و يصبح التكامل بالشكل

$$I_2 = \int x\,Ln(x)dx = (Ln(x))\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2Ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2Ln(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C = \frac{1}{2}x^2Ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C = \frac{1}{4}x^2(2Ln(x)-1) + C$$

النموذج الثالث: استخدام طريقة التكامل بالتجزئة لحساب أي تكامل من الشكل

$$\int e^{ax+b}\cdot Sin(cx+d)dx \quad , \quad \int e^{ax+b}\cdot Cos(cx+d)dx$$

حيث يمكن في هذه الحالة أن نفرض أياً من الدالتين الموجودين داخل إشارة التكامل هو الدالة $u(x)$ و يصبح الدالة الآخر هو الدالة $v'(x)$. ثم نجري التكامل بالتجزئة مرتين حيث نحصل في المرة الثانية على التكامل الأساسي من جديد لنكون معادلة جبرية يمكن حلها للحصول على التكامل المطلوب.

مثال: أحسب التكامل $I = \int e^{2x+1}Cos(x-1)dx$ ؟

الحل: لحساب هذا التكامل نضع $u = e^{2x+1}$ و $v' = Cos(x-1)$ فيكون $u' = 2e^{2x+1}$ و يكون $v = Sin(x-1)$, و يصبح التكامل بالشكل

$$I = \int e^{2x+1}Cos(x-1)dx = e^{2x+1}Sin(x-1) - 2\int e^{2x+1}Sin(x-1)dx$$

و لحساب التكامل الأخير نضع $u = e^{2x+1}$ و $v' = Sin(x-1)$ فيكون $u' = 2e^{2x+1}$ و يكون $v = -Cos(x-1)$, و يصبح التكامل بالشكل

$$\begin{aligned} I &= \int e^{2x+1}Cos(x-1)dx \\ &= e^{2x+1}Sin(x-1) - 2[(e^{2x+1})(-Cos(x-1)) - \int(-Cos(x-1))(2e^{2x+1})dx] \\ &= e^{2x+1}Sin(x-1) + 2e^{2x+1}Cos(x-1) - 4\int e^{2x+1}Cos(x-1)dx \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$I = e^{2x+1}Sin(x-1) + 2e^{2x+1}Cos(x-1) - 4I \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{1}{5}[Sin(x-1) + 2Cos(x-1)]e^{2x+1}$$

تمارين غير محلولة

تمرين (1): أحسب التكاملات التالية بطريقة تغيير المتحول

$I_1 = \int (ax+b)^n dx \ ; \ n \neq -1$

$I_2 = \int (x^2+2x+1)e^{x^3+3x^2+3x-1}dx$

$I_3 = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}}\, dx$

$I_4 = \int e^x\sqrt{e^x+1}\, dx$

$I_5 = \int \frac{x}{x^2+1}\, dx$

$I_6 = \int \frac{x^2}{x^6+1}\, dx$

$I_7 = \int \frac{x^2}{x^2+a^2}\, dx$

$I_8 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$I_9 = \int (Ln(x))^3 \frac{dx}{x}$

$I_{10} = \int \sqrt{Sin(x)}\, Cos(x)dx$

$I_{11} = \int (Tan(x))^3 dx$

$I_{12} = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx$

تمرين (2): أحسب التكاملات التالية بطريقة التكامل بالتجزئة

$I_1 = \int 16x\, e^{-2x}dx$

$I_2 = \int x\, Ln(x+1)dx$

$I_3 = \int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx$

$I_4 = \int ArcSin(x)dx$

$I_5 = \int 15x\sqrt{(x+4)^3}\,dx$ $\qquad$ $I_6 = \int \frac{2x}{(x-8)^3}\,dx$

$I_7 = \int 6x\,e^{x+7}\,dx$ $\qquad$ $I_8 = \int x\,Ln(x+1)\,dx$

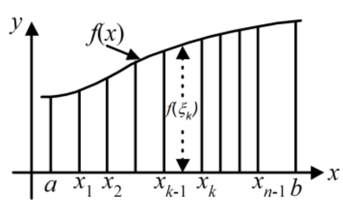
$I_9 = \int \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}\,dx$ $\qquad$ $I_{10} = \int x(x+1)^{10}\,dx$

$I_{11} = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\qquad$ $I_{12} = \int \frac{x}{e^{4x}}\,dx$

التكاملات المحددة

مفهوم التكامل المحدد:

ليكن $f(x)$ دالة معرفاً ومستمراً على المجال $I = [a,b]$ من المحور الحقيقي، إذا قسَّمنا المجال $[a,b]$ بشكل كيفي إلى n مجالاً جزئياً باستخدام النقاط $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ ، وبحيث أن



الشكل (4-1)

إذا رمزنا لطول المجال الجزئي $[x_{k-1}, x_k]$ بـΔx_k، أي أن $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$، وأخذنا من كل مجال جزئي نقطة كيفية ξ_k تقع بين x_{k-1} و x_k من أجل $k = 1,2,\cdots,n$ ، وعيَّنا قيمة الدالة عند هذه النقطة $f(\xi_k)$ ، وشـــكلنا المجموع التالي

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \,, n = 2,3,\cdots \qquad (1)$$

فإن هذا المجموع يسمى المجموع التكاملي.

واضــــح أنه لكل دالة معرف على المجال $[a,b]$ ، يمكن تعيين عدد لانهائي من المجاميع التكاملية لأن طرائق تقسيم المجال لانهائية، وكذلك طرائق اختيار النقاط ξ_k لا نهائية.

إذا زدنا عدد نقاط التقسيم بشكل غير محدود، فإن أكبر أطوال Δx_k ينتهي إلى الصفر، ونحصل على متتالية من الأعداد الحقيقية $S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots$. تسمى نهاية هذه المتتالية (إن وجدت) التكامل المحدد للدالة $f(x)$ على المجال $[a,b]$ ، ونرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)dx$. أي أن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (2)$$

ونقول إن الدالة $f(x)$ قابلاً للمكاملة في المجال $[a,b]$.

مبرهنة: إذا كان الدالة $f(x)$ مستمراً على المجال $[a,b]$ ، فإن متتالية المجاميع التكاملية متقاربة، ونهايتها لا تتعلق بطريقة تقسيم المجال $[a,b]$ ولا تتعلق بطريقة اختيار النقاط الكيفية على المجالات الجزئية.

علاقة نيوتن – ليبنتز:

من أجل أي دالة مستمر $f(x)$ على المجال $[a,b]$ ، تكون العلاقة التالية محققة:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (3)$$

حيث أن $F(x)$ هو أي دالة أصلي للدالة $f(x)$.

تسمى العلاقة (3) علاقة نيوتن – ليبنتز، وتعتبر العلاقة الأساسية في الحساب التكاملي. وفقاً لهذه العلاقة، ولإيجاد نهاية متتالية المجاميع التكاملية أو التكامل المحدد $\int_a^b f(x)\,dx$ نوجد أحد التوابع الأصلية $F(x)$ للدالة الذي تحت إشارة التكامل $f(x)$ ، ثم نحسب قيمة الدالة الأصلي من أجل $x = b$ (الحد الأعلى للتكامل) ونطرح منه قيمته من أجل $x = a$ (الحد الأدنى للتكامل).

ملاحظة: مألوف الرمز التالي للتكامل المحدد:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

خواص التكامل المحدد:

بما أن التكامل المحدد ينتج من التكامل غير المحدد، فإن جميع خواص التكامل غير المحدد صحيحة للتكامل المحدد، كما أن للتكامل المحدد بعض الخواص الأخرى منها:

1) إذا بادلنا بين حدي التكامل المحدد، فإن إشارة التكامل تتبدل:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad (4)$$

2) إذا كان حدي التكامل متطابقين، فإن قيمة التكامل المحدد تساوي الصفر:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad (5)$$

3) إذا كان $a < c < b$ ، وكان الدالة $f(x)$ قابلاً للمكاملة على المجالين $[a,c]$ و $[c,b]$ ، فإن الدالة $f(x)$ يكون قابلاً للمكاملة على المجال $[a,b]$ ، وإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (6)$$

4) التكامل المحدد مستقل عن متحول الدالة المكامل ولا يتعلق بأي ثابت اختياري، أي أن:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a) \qquad (7)$$

5) إذا كان الدالة $f(x)$ قابلاً للتكامل على المجال $[a,b]$ ، وكان $f(x) \geq 0$ من أجل كل x من المجال $[a,b]$ ، فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. وبالتالي إذا كان $f(x), g(x)$ دالقان قابلان للمكاملة على المجال $[a,b]$ ، وكان:

$$f(x) \geq g(x); a \leq x \leq b$$

فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

6) إذا كان $f(x)$ دالة مستمراً في المجال المغلق $[a,b]$ ، فيوجد عدد α من المجال المفتوح (a,b) بحيث أن

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\alpha)(b-a)$$

7) لحساب قيمة التكامل المحدد الذي من الشكل:

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x) dx$$

نضع:

$$u = g(x)$$

فيكون:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

(قارن مع التكامل غير المحدد بطريقة تغيير المتحول).

مثال: احسب قيمة التكامل المحدد التالي:

$$\int_2^{10} \frac{3dx}{\sqrt{5x-1}}$$

الحل:

$$\int_2^{10} \frac{3dx}{\sqrt{5x-1}} \overset{u=5x-1}{=} \frac{3}{5}\int_9^{49} \frac{du}{\sqrt{u}}$$
$$= \frac{3}{5}(2)\sqrt{u}\Big|_9^{49}$$
$$= \frac{6}{5}(7-3)$$
$$= \frac{24}{5}$$

مثال: احسب قيمة التكامل المحدد التالي:

$$\int_0^1 x\sqrt[3]{7-6x^2}dx$$

الحل:

$$\int_0^1 x\cdot\sqrt[3]{7-6x^2}dx \overset{u=7-6x^2}{=} -\frac{1}{12}\int_7^1 \sqrt[3]{u}du$$
$$= -\frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)u^{\frac{4}{3}}\Big|_7^1$$
$$= -\frac{1}{16}+\frac{7\sqrt[3]{7}}{16}$$
$$= \frac{7\sqrt[3]{7}-1}{16}$$

8) إذا كان $f(x)$ دالة مستمراً وزوجياً على المجال $[-a,a]$ ، فإن:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

وإذا كان $f(x)$ دالة مستمراً وفردياً على المجال $[-a,a]$ ، فإن:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

مثال:

$$\int_{-1}^{1} x^2 Sin(x)dx = 0$$

مثال:

$$= \frac{22}{5}\int_{-1}^{1}(x^4+3x^2+1)dx = 2\int_0^1(x^4+3x^2+1)dx$$

9) إذا كان $f(x)$ دالة مســـتمراً في المجال المغلق $[a,b]$ ، وكان $a\le c\le b$ ، فإنه من أجل كل x من المجال $[a,b]$ ، يكون:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_c^x f(t)\,dt\right] = F'(x) - F'(c) = f(x) \qquad (8)$$

وتعمم هذه النتيجة كما يلي:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_c^{g(x)} f(t)dt\right] = F'(g(x)) = f(g(x))g'(x) \qquad (9)$$

مثال:

$$= \frac{x^8}{\sqrt[3]{3x^4+x^2}} \cdot 4x^3 \frac{d}{dx}\left[\int_2^{x^4} \frac{t^2}{\sqrt[3]{3t+\sqrt{t}}}dt\right] = \frac{(x^4)^2}{\sqrt[3]{3x^4+\sqrt{x^4}}} \cdot (x^4)'$$

10) علاقة التكامل بالتجزئة للتكامل المحدد تأخذ الشكل:

$$\int_a^b udv = u \cdot v|_a^b - \int_a^b vdu$$

مثال: احسب قيمة التكامل المحدد التالي:

$$\int_0^1 ArcSin(x)dx$$

الحل:

$$\int_0^1 ArcSin(x)dx = x \cdot ArcSin(x)|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= 1 \cdot ArcSin(1) - 0 \cdot ArcSin(0) + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1$$
$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

تمارين

1− احسب قيمة كل تكامل من التكاملات المحددة التالية:

1) $\int_2^3 \frac{x^2-1}{x-1}dx$

2) $\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}dx$

3) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)^3}$

4) $\int_{-8}^8 \left(\sqrt[3]{s^2}+2\right)ds$

5) $\int_{-3}^6 |x-4|dx$

6) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Cos\left(\frac{1}{3}x\right)dx$

7) $\int_1^2 \frac{Ln(x)}{x^5}dx$

8) $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{(4x+1)\cdot\sqrt{x}}$

9) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} [x+Sin(5x)]dx$

2− احسب المشتق بالنسبة لـ x لكل من التوابع المعرفة بالشكل التالي:

$$f(x) = \int_2^{x^4} \frac{t}{\sqrt{t^3+2}} dt \quad , \quad g(x) = \int_{3x}^{x^3} (t^3+1)^{10} dt \quad , \quad h(x) = \int_0^{x^2} t \cdot ArcTan(t) dt$$

الفصل الثاني

مقدمة في الإحصاء الوصفي

Introduction to descriptive statistics

1 – مقدمة:

ظهر الإحصاء، شأنه شأن العلوم الأخرى، من الحاجات العملية للمجتمع، فقد برز وتطور بفعل حاجات الحياة. في البدء استعمل الإحصاء فقط لتعداد السكان إنما فيما بعد اتسعت دائرة نشاطه وأصبح أكثر التصاقاً بالحياة اليومية. فعلى إثر تزايد تعقد حياة الناس وتعمق العلاقات في المجتمع، تصبح التجربة الابتدائية غير كافية. وهذا يدفع بالتالي إلى ضرورة العمل للاستنتاج من تجارب وملاحظات الأفراد. وبالتالي فتاريخ الإحصاء طويل وكبير. سوف نكتفي هنا باستعراض الأحداث التي شكلت المنعطفات الرئيسية في تاريخ هذا العلم، وهي كافية لرسم خط تطوّره والأخذ بغرضه الحالي. على إثر ظهور المجتمع الطبقي والدولة برزت الحاجة الملحّة لمختلف المعلومات المتعلقة بالبلاد، كالسكان ومقومات ثروة الدولة، الخ .... وقد اقتضى الأمر القيام بأعمال التعداد الإحصائي للحصول على هذه المعلومات المختلفة. وإلى مثل هذه الأعمال، يمكن أن نرد نشأة أعمال الإحصاء القديمة، أو بالأحرى تعداد السكان، سيما الذكور القادرين على حمل السلاح منهم. وهناك بالنسبة لهذا الموضوع، معلومات عن تعداد السكان في مصر القديمة يعود للسنة 3500 ق. م. وفي غيرها من مختلف دول عصر الرق. ومع ظهور المجتمع الطبقي والسلطة السياسية نتيجة لذلك، برزت فكرة الجردة شبه الدائمة للسكان والخيرات المتوافرة في البلاد.

وقد تجسّدت آنذاك فكرة الجردة هذه بشكل رئيس في تعداد السكان تلبية للحاجات العملية، الحربية منها والضريبية، لدول عصر الرق. فقد كان لدى الصينيين، فيما بين الألفين الرابع والثاني ق. م، معلومات عن السكان، وكانوا يستعملون جداول إحصائية تتعلق بالزراعة والشيء نفسه بالنسبة للمصريين، الذين عرفوا التعداد الدائم.

وقد أماطت قراءة الكتابة الهيروغليفية اللثام عن النفوذ الضخم لهذا الإحصاء وأثره في حياة البلاد ولغتها. فلم يكن للسنين في الواقع تعبير رقمي شبيه بالذي نعرفه لها اليوم فقد كانت السنون تعرف وتميز، ومنذ عصور السلالات الأولى، بالأحداث الهامة التي وقعت فيها ودمغتها، كالسنة التي انتصر فيها مثلاً الفرعون على الآسيويين أو سنة تدشين ذاك الهيكل لذلك الإله.

فعبارة سنة كان يرمز لها بعلامة ملحقة بالحدث الهام. فيما بعد أصبحت السنوات تسجل بالنسبة للسنة التي جرى فيها إحصاء الضرائب، فيقال مع بدء زمن الإحصاء الثاني للماشية أو الحقول أو الذهب. في البداية كانت هذه العملية الضريبية تجري مرة كل سنتين. إنما فيما بعد وعلى أثر القيام بها سنوياً، بدءاً من السلالة السادسة، أصبحت كلمة إحصاء مرادفة لكلمة سنة.

هذا ولا بد من الإشارة إلى أن المصريين وضعوا أقدم ميزان اقتصادي عرف في أيامهم وهو ميزان النيل فمستوى ارتفاع فيضان النيل كان مؤشراً ممتازاً للخصب، ويستعمل لتقدير حجم الضرائب. ومن المرجح أنه كان لدى الحضارات العائدة لهذه العصور القديمة، كالآمور والهندوس مثيل هذه الوسائل الإحصائية، التي من المحتمل أن تكشف عنها أعمال الحفريات القائمة.

أما بالنسبة لليونان والرومان فقد تخطوا في أعمالهم التعددية الأغراض الحربية والضريبية ليشملوا غيرها، كتوزيع الأراضي، وتعيين الوضع الاجتماعي للسكان والتموين (مثل خزن بومب يوس للقمح لأجل إطعام 486.000 شخص)، وتوزيع المعونات (مثلاً أعطى أغس طوس في السنة الخامسة ق. م 60 درهماً لكل من المواطنين من العامة والبالغ عددهم 32.000 شخص).

وفي روما القديمة كان الغرض من التعدادات هو تعيين حجم الضريبة المتوجب دفعها للدولة الرومانية. فأثناء القيام بعمليات تشكيل ونقل لوائح التعداد، كان المواطنون الرومان يصرحون، بعد حلفهم اليمين بقولهم الحق، عن قيم ممتلكاتهم وعن أعمالهم ووضعهم العائلي. وقد كانت هذه البيانات كافية لتقسيم السكان حسب الثروة والرتبة العسكرية.

وننهي هذه الفقرة مشيرين إلى أن تطور علم الإحصاء، المرتبط بتطور باقي العلوم، وعبر تداخل مختلف الأحداث الاجتماعية التي تعكس الازدواجية والتناقض لوحدة المجتمع الطبقي الجدلية، وأصبح يعرَّف **علم الإحصاء بأنه العلم الذي يختص بالطرائق العلمية لجمع البيانات وتنظيمها وتلخيصها، وذلك عن طريق التعبير عنها أو عرضها بصورة علمية وتحليلها بغرض الوصول إلى استنتاج النتائج والقوانين التي تحكمها، واتخاذ قرارات سديدة ملائمة لذلك.** وينبغي الإشارة إلى وجود قسمين رئيسيين للإحصاء هما:

1 – الإحصاء الوصفي: ويشمل الطرائق الخاصة بتنظيم البيانات وتلخيصها وعرضها في صورة جداول إحصائية أو رسوم بيانية، أو أشكال هندسية أو تلخيصها، أو حساب مقاييس النزعة المركزية، ومقاييس التشتت وغيرها من المقاييس الأخرى.

2 – الإحصاء الاستنتاجي (الاستدلالي): وهو عبارة عن مجموعة الطرائق العلمية التي تُطبق الاستدلال على المجتمع بناءً على البيانات الإحصائية التي جُمعت وفق طرائق إحصائية محددة، وتشتمل على عدد من المفاهيم والنظريات، مثل نظرية التقدير، واختبار الفرضيات، واختبار جودة الإنتاج.

1 – 2– بعض المفاهيم والمصطلحات الأساسية في الإحصاء :

نعرض في هذا الفصل بعض المفاهيم الأساسية في الإحصاء. يهتم هذا الفرع من الإحصاء باستخدام البيانات المتوفرة لدينا في إصدار أحكام أو تعميمات إحصائية مبنية على الاحتمال حول بيانات غير متوفرة لدينا في المجتمع أو المجتمعات الإحصائية. وقبل البدء بالاستنتاج الإحصائي، لابد وأن نذكر بعض المفاهيم الإحصائية التالية:

1 ـــ المجتمع الإحصائي والعينة: يستند الاستنتاج الإحصائي بصورة جوهرية على البيانات التي يتم الحصول عليها من العناصر ومن خلال هذه البيانات تصاغ التعميمات والاستنتاجات الإحصائية حول جميع العناصر الذين تمثلهم هذه البيانات.

المجتمع الإحصائي: هو أي مجموعة من الأشياء أو الأشخاص التي تشترك فيما بينها بصفة أو عدة صفات، مثل سكان مدينة دمشق، أطباء الجراحة العامة، صيادلة سوريا، مرضى السرطان.

العينة الإحصائية: هي مجموعة جزئية محدودة من المجتمع الإحصائي يتم جمع البيانات من خلالها ويتحكم في طريقة اختيارها وفي حجمها بعض المبادئ الإحصائية والتي سنتعرض لها فيما بعد.

2 ـــــــ الوحدة الإحصائية: هي كل ظاهرة بسيطة أو كائن أو شيء يشترك في صفة أو أكثر تكون موضوع الدراسة الإحصائية على أن تعرف تعريفاً واضحاً وهي أصغر جزء مستقل تجري عليه الدراسة وتجمع البيانات على أساسه. فيمكن أن تكون الوحدة الإحصائية كائناً حياً مثل إنسان في دراسة تعداد السكان أو طائر أو شجرة، وقد تكون شيئاً مثل السيارة في دراسة وسائط النقل أو بنك أو آلة حاسبة، وقد تكون وحدات قياس كالمسافات والمساحات والحجوم والأوزان والقيم.

وللحصول على الوحدة الإحصائية المثلى، ينبغي أن تتصف بالصفات التالية:

1 – أن تكون الوحدة الإحصائية ملائمة لغرض الدراسة.

2 – أن تكون الوحدة الإحصائية ثابتة ومستقرة.

3 – أن يكون مجموع الوحدات الإحصائية يشكل المجتمع الإحصائي.

وتقسم الوحدات الإحصائية بحسب أنواعها إلى قسمين:

آ – **الوحدات البسـيطة:** وهي التي تسـتعمل في عمليات الجمع والتحليل والعرض الإحصـائي، حيث تقسـم إلى ثلاثة أنواع هي:

- **وحدات العد:** وهي التي تستعمل في عمليات العد، وتشمل الأشياء المادية وصفاتها.
- **وحدات القياس:** وهي التي يمكن قياسها بواسطة الوزن أو الطول أو المقاييس المختلفة.
- **الوحدات النقدية:** كالليرة السورية والدينار والدولار واليورو ....

ب – **الوحدات المركبة:** وهي التي تتكون من مقياس أو أكثر مثل ضـــغط الدم/ ســاعة، الميلي غرام/ الســنتيمتر مكعب، الكيلوغرام/المتري، الشخص/الساعي، الكيلو واط/الساعي.

3 – البيانات الإحصائية: تقسم البيانات عادة إلى قسمين أساسيين هما:

1– البيانات الوصفية أو الكيفية Qualitative Date: وهي البيانات الإحصائية التي تصف عناصر الظاهرة المدروسة في صورة غير رقمية، مثل الحالة التعليمية لموظفي الجامعة، لون الشعر أو لون العينين أو تقديرات النجاح في إحدى المواد.

2– البيانات الكمية Quantitative Date: وهي البيانات الإحصائية التي تقاس فيها عناصر الظاهرة المدروسة بالمقاييس الكمية المعروفة، مثل عدد مرضى مشفى المواساة خلال سنة، الأسهم المباعة في سوق الأوراق المالية، أطوال مجموعة طلاب الكليات الطبية، وغيرها من الظواهر الأخرى. وهذه البيانات الكمية يمكن تصنيفها وفق طبيعة الأرقام المستعملة إلى:

آ– **بيانات مستمرة** وهي متغيرات مستمرة يمكن أن تأخذ أية قيمة ضمن فترة محددة ومن ثُمَّ يمكن التعبير عنها بأعداد حقيقية، كالتي تعبر عن الوزن أو الطول أو الحجم أو النسبة.

ب– بيانات منفصلة وهي متغيرات منفصلة تأخذ قيماً محددة تماماً، مثل تعداد الكريات الحمر في واحد ميليمتر مكعب من الدم، وعدد المرضى في مشفى المواساة .

4 – الوسـيط أو المعلمة: الوسـيط هو شـيء يميز المجتمع الإحصـائي كله مثل متوسـط الدخل الشـهري للأسـر في دولة معينة، أو نسبة الأشخاص المدخنين بصفة دائمة في مجتمع معين، أو نسبة الأدوية الفاسدة في شركة طبية وهكذا ...

5 – الإحصاء: الإحصاء هو شيء يميز العينة الإحصائية مثل متوسط الدخل الشهري لعينة مؤلفة من 200 عامل في شركة أدوية في دولة ما أو متوسط الذكاء لعينة مؤلفة من 100 طفل أعمارهم بين الثامنة والعاشرة وهكذا .

6 – المتغيرات: المتغيرات هي مقادير لها خصائص كمية أو وصفية تتغير من عنصر إلى آخر من عناصر المجتمع الإحصائي أو من العينة الإحصائية.

يتكون المجتمع الإحصائي عادة من مجموعة من الأفراد أو العناصر التي تشترك فيما بينها بخاصة أو أكثر مثل سكان مدينة ما، طلاب جامعة البعث، مجموعة الفئران قيد التجارب، مجموعة من الأغذية قيد التحليل، مجموعة الجامعات الخاصة ... .

وعند دراسة أحد هذه المجتمعات يجب علينا تحدد الهدف من الدراسة، فقد يكون هدفنا دراسة ظاهرة ما مثل الطول أو الوزن أو الذكاء أو الجنس أو لون العيون أو لون البشرة أو لون الشعر أو قياس مستوى الهيموغلوبين في الدم لدى مجموعة من الأشخاص، قياس السكر في الدم عند مرضى السكري، فإن مفردات الظاهرة لمتغير الطول أو الوزن أو الذكاء أو مستوى الهيموغلوبين في الدم أو كمية السكر في الدم تكون بيانات كمية بينما تكون بيانات وصفية لمتغير الجنس أو لون العيون أو لون البشرة أو لون الشعر. فبعد تحديد المجتمع والظاهرة أو الحالة التي نرغب في دراستها نعرف المتغير العشوائي، وهو الوسيلة الرياضية التي نقرن بها كل فرد من أفراد المجتمع (أحد طلاب الجامعة، مريض السكري... إلى آخره) بقياس عددي (مثل طول شخص، قياس مستوى الهيموغلوبين، قياس السكر في الدم، تكلفة الدراسة، عدد يمثل نوع النبات المستخدم).

بعد تحديد المتغير العشوائي ينصب جهدنا في دراسة وتحليل القيم العددية له أو مجموعة كل الحالات الممكنة وللمتغير العشوائي مجموعة من الصفات أهمها:

1 – العشوائية: تتغير قيمه بشكل عشوائي من عنصر لآخر من عناصر العينة.

2 – لكل فرد من أفراد العينة قيمة وحيدة.

3 – يعرَّف على أفراد العينة من المجتمع، ويأخذ قيمة في R مجموعة الأعداد الحقيقية.

4 – لكل متغير عشوائي مدى، وهو مجموعة كل القيم التي يمكن أن يأخذها من R.

فإذا كان الهدف دراسة عدد أفراد أسر طلاب كلية الطب فيكون مدى متغير عدد أفراد الأسرة هو مجموعة الأعداد {1،2، ... ،15} . وإذا كان المتغير يمثل أطوال الأشخاص البالغين في مدينة فإن مداه هو المجال التالي [150، 210] من R. ويكون مدى متغير عيار السكر في الدم هو كذلك مجال، وليكن [50،400] على أن يحوي كل القيم الممكنة للمتغير. وأما مدى متغير أنواع الأسماك فهو مجموعة الأعداد الطبيعية {1،2، ... ،20}عندما يكون في النهر 20 نوعاً على الأكثر.

والمتغيرات العشوائية نوعان هما:

- المتغيرات العشوائية المنفصلة: هي المتغيرات التي تكون قيمها أعداداً صحيحةً مثل عدد طلاب كلية العلوم، أعداد الكريات الحمراء في حجم محدد من سائل دموي.
- المتغيرات المستمرة: هي التي قيمها قد تكون أي عدد حقيقي من مجال محدد (مدى المتغير) مثل طول شخص بالغ، قياس السكر في الدم ... إلى آخره.

سـيكون لقيم المتغيرات العشـوائية دلالات مختلفة تعود لطبيعة العينة وللمتغير نفســه الذي يعبر عن الظاهرة المدروســة ، ولهذا سـننظر إلى مدى البيانات أو القياسـات بمقاييس مختلفة متدرجة في الدقة من مقاييس بسـيطة إلى مقاييس عددية ، فالأعداد التي تعبر عن حالات معينة في المجتمع المدروس والمقيسة بسلم بسيط تستخدم فقط للتمييز بين أفراد العينة بينما الأعداد التي تعبر عن كميات تحتاج لمقياس ذو مسـتوى أعلى نسـتطيع عندها إجراء جميع العمليات الحسـابية عليها ومن ثُمَّ نستطيع استخدام تقنيات إحصائية أكثر تنوعاً في دراسة العينة واستقراء المجتمع.

1 – 3– أنواع سلالم القياس:

من العوامل التي تحدد طريقة تلخيص البيانات وتحليلها نوعية المقياس المستخدم لتلك البيانات، فالمقياس هو استخدام الأرقام في وصف الأحداث، وذلك بناءً على قواعد معينة، وعند تغيير هذه القواعد سوف نحصل على أنواع مختلفة من المقاييس، وعليه فإنه ينبغي مراعاة ما يلي:

1 – القواعد المختلفة التي تستخدم الأرقام بناءً عليها. فمثلاً عند استخدام الأرقام تحت قاعدة التمييز فإن المقياس المستخدم يساعدنا فقط على أن نميز بين شيء وآخر دون تحديد كميته.

2 – الخواص الرياضية للمقياس الناتج عن استخدام الأرقام تحت هذه القواعد.

3 – العمليات الإحصائية المستخدمة في معالجة المقياس الناتج سواءً من حيث بناؤه وتكوينه أم من حيث تحليل نتائج تطبيقاته المختلفة.

يوجد أربعة مستويات لمقاييس القياس في البحث: اسمية، ونسبية، وترتيبية، والفترات .وهي تعرف أيضا باسم المستويات الأربع للقياس، حيث يعتبر كل مقياس منهم ترقية للمقياس الذي يسبقه كما أنه يشمله، وقبل أن نناقش المستويات الأربع من مقاييس القياس بالتفصيل، مع الأمثلة، دعنا نلقي نظرة سريعة ومختصرة عما تمثله هذه المستويات الأربع. المقياس الاسمي هو مقياس مسمِّي، تكون فيه المتغيرات "مسماة" أو "معنونة" ببساطة، بلا ترتيب معين. أما المقياس الترتيبي فتكون كافة متغيراته مرتبة ترتيب معين، يتعدى مجرد تسميتهم. بينما تقدم مقاييس الفترات العناوين، الترتيبات، الى جانب فترة محددة بين كل من خيارات متغيراتها. ويحمل المقياس النسبي جميع خصائص مقياس الفترات، بالإضافة الى أن بإمكانه استيعاب قيمة "الصفر" في أي من متغيراته.

وبناءً عليه سنميز بين أربعة أنواع من المقاييس:

1 – المقياس الاسمي (Nominal Scale):

وهو أدنى مستويات القياس، وفيه تستخدم الأعداد فقط للتمييز بين الأشياء، فالهدف من هذا النوع هو التصنيف والعمل على تجميع الأشياء التي تشترك في خاصة ما تميزها من غيرها من الفئات. فنحصل على بالتكرار، وأحياناً نصنف البيانات

بالنسبة لخاصتين مختلفتين بنفس الوقت، فهنا كل مجموعة ليست متميزة من حيث الأهمية أو الترتيب كما أنه ليس للعمليات الحسابية على الأرقام أي معنى، لأن الأرقام هنا لا تعبر عن كميات ولا يمثل الرقم كمية ما يحتويه الشيء المصنف من تلك الخاصة وإنما، يدل الرقم على معنى كيفي لمجرد التصنيف فقط.

مثال (1): عند دراسة تأثير التدخين على الإصابة بمرض ما وبعد جمع البيانات سنحصل على عينة، كل فرد من أفرادها مدخن أو غير مدخن وكل فرد مصاب أو غير مصاب بذلك المرض، حينئذٍ نعرف متغيرين نعتبر الأول يأخذ القيمة 1 إذا كان الشخص مدخناً والقيمة 0 إن لم يكن مدخناً، والمتغير الثاني يأخذ القيمة 1 إن كان مصاباً والقيمة 0 إن كان سليماً فالرّقْمان صفر وواحد لا يمثلان كمية، بل استخدما لتصنيف العينة مرة إلى مدخنين وغير مدخنين، ومرة حسب الحالة الصحية إلى مصابين أو أصحاء.

ويمكننا أيضاً النظر للعينة على أنها مكونة من أربع فئات:

الفئة الأولى المدخّنون المرضى، فنعطيها مثلاً الرقم 1.

الفئة الثانية المدخّنون غير المرضى فنعطيها الرقم 2.

الفئة الثالثة غير المدخنين المرضى فنعطيها الرقم 3.

الفئة الرابعة غير المدخنين غير المرضى فنعطيها الرقم 4.

فالأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 لا تعبر عن كمية، وليس للعمليات الحسابية معنى عليها، ولا تعط الرقم الأكبر أيّ أهمية لمجموعته.

مثال (2): لإيجاد علاقة افتراضية بين الزمرة الدموية وإحدى الصفات الجسدية كالوزن مثلاً، نسحب عينة من البالغين الذكور، ونسجل لكل شخص زمرته الدموية ووزنه، ثُمَّ نستخدم الأرقام لتصنيف العينة حسب الزمرة الدموية، ونجعل الرقم 1 مثلاً يعبر عن الزمرة A^+ والرقم 2 للزمرة A^- وهكذا... فليس للأرقام أي دلالة كمية، بل استخدمت لتصنيف العينة حسب الزمرة الدموية، ولا يكسب الرقم الأكبر للمجموعة الممثلة أيّ أهمية تميزها من الزمرة الدموية الممثلة برقم أصغر.

2 – المقياس الرتبي Ordinal Scale :

يأتي هذا المستوى بعد المستوى الاسمي من حيث التعقيد، فهو يسمح بترتيب السمات دون اعتبار لتساوي الفروق بين أي رتبتين، فالشخص الذي يمتاز بسمة أكبر من غيره يكون ترتيبه الأول وهكذا .... ولا يشترط أن تكون الفروق بين درجات الصفة المدروسة متناسبة أو مساوية للفروق بين رتبها، فرتبة السمة تعبر عن أن الشخص يمتلك من السمة المقيسة أكثر أو أقل مما يمتلكه آخر، ولكن تلك الرتبة لا تدل على مقدار ما يمتلكه كل منهم. لذلك لا نستطيع أن نجري أيّ عمليات حسابية على تلك القياسات. لكننا نستطيع أن نعد تكرارات العينة عند كل رتبة وحساب الوسيط وبعض اختبارات الدلالة الإحصائية مثل اختبار الوسيط وغير ذلك.

مثال (3): بفرض أننا نريد إجراء دراسة متعلقة بشدة الإصابة بمرض ارتفاع السكر في الدم لسكان مدينة دمشق. أخذت عينة من سكان المدينة بشكل عشوائي، وأجريت لها مجموعة من الاختبارات والتحاليل الطبية خلال فترات زمنية، وسجلنا النتائج لكل شخص، وحسب معايير معينة واعتماداً على خبرة لجنة من الأطباء صنفت العينة حسب شدة الإصابة بالمرض إلى الفئات الآتية (سليم، مصاب، مصاب إصابة خفيفة، مصاب بشدة، إصابة شديدة جداً) نرفق هذه الصفات بالأرقام الآتية على الترتيب (4،3، 2، 1، 0)، وهي مجموعة قيم المتغير العشوائي.

إن هذه الأرقام التي تمثل شدة الإصابة تسمح لنا فقط بالتمييز والمقارنة بين شخص وآخر. لكن الفرق بين رقمين لا يقارن مع الفرق بين رقمين آخرين. أي لا معنى لعملية الطرح بين هذه الأرقام، وقد أفاد بعض الإحصائيين أنه إذا كانت أداة القياس متدرجة كما في هذا المثال فيمكننا معاملة البيانات على أنها بيانات فتروية واستخدام الإحصاءات الوسيطية في معالجتها.

3 – المقياس المجالي Interval Scale:

يعد هذا النوع من القياس أدق من القياسين السابقين ؛ إذ أنّه يتصف بكل ما سبق، إضافة إلى أنه يتمتع بوحدات متساوية تمكننا من أن نحدد إذا كان شَيءٌ يساوي شيئاً آخر أو أكبر أو أصغر وقيمة الفرق بين الكبير والصغير، لذلك نستطيع جمع هذه المسافات أو طرحها، ولكن لا يمكن إجراء عملية القسمة في هذا النوع من القياس وذلك لعدم وجود الصفر المطلق (أي إن قيمة "صفر" تكون نسبية وليست مطلقة، ولكننا لا نستطيع اعتبار أن هذه الدرجة تناظر مقدار السمة التي يفترض أن الاختيار قد صمم لقياسها وإلا كان معنى ذلك أن مقدار السمة المقيسة عند الطرف هي صفر. وفي هذا المستوى من القياس يمكن حساب المتوسطات والانحرافات المعيارية ومقاييس العلاقة الخطية.

مثال (4): بفرض أننا نرغب في دراسة العلاقة بين مستوى التحصيل العلمي لخريجي كلية العلوم ومستوى المعيشة الأسرية أو المنطقة التي يسكنها الطالب. وصنفنا الطلاب المتخرجين كما يأتي المجموعة الأولى من كان معدله أقل من 70% ، والثانية من كان معدله بين 70% و 80% ، والثالثة بين 80% و90%، والرابعة من كان معدله 90% أو أعلى.

نعرف الآن المتغير العشوائي بالشكل التالي: يأخذ القيمة صفراً إذا كان الطالب من المجموعة الأولى، والقيمة 1 إذا كان من المجموعة الثانية، وهكذا ... فتكون مجموعة قيمه هي المجموعة { 0 ،1، 2، 3 } ، يمكننا ترتيب هذه القيم حسب دلالاتها من الأدنى إلى الأعلى: الدرجة صفر مقبول، ثُمَّ الدرجة 1 نصنفها بالجيد ،والدرجة 2 جيد جداً ، والدرجة 3 ممتاز ومِنْ ثُمَّ يمكن مقارنة طالب درجته 1 عن آخر درجته 2 مثلاً. إضافة إلى ذلك نستطيع المقارنة بين الفرق الأول ما بين الدرجة 1 والدرجة صفر مع الفرق بين الدرجة 2 والدرجة 1، أي الفروق بين الدرجات تتناسب مع الفروق بين الرتب، ودرجة الصفر هنا لها معنى نسبي وليس معنى مطلقاً.

4 – المقياس النسبي Ratio Scale:

وهذا النوع من المقاييس هو أعلى مستويات القياس، حيث يمكن استخدام جميع العمليات الحسابية، إذ أن له صفراً مطلقاً يعني انعدام الصفة التي نقيسها. وتتوفي في هذا المستوى جميع خصائص مقاييس المسافة بالإضافة إلى الصفر المطلق وهذا النوع من المقاييس مألوف لنا أكثر من غيره من المقاييس، وذلك لأن جميع أبعاد الأجسام كالطول والوزن والحجم يمكن قياسها بهذه الطريقة، ولهذا يمكن القول إن الشخص الذي يبلغ طوله 180 سم له ضعف طول الشخص الذي طوله 90 سم. وتسمية هذا النوع باسم مقاييس النسبة جاءت من قابليته لاستخراج النسبة بين الأعداد والتعبير عن القياس في صورة نسبة. ويستخدم هذا النوع من القياس لتمثيل صفات يمكن قياسها أو قياس كميتها مثل تركيز السكر في الدم، الكوليسترول، عدد الكريات البيضاء في حجم معين ... إلى آخره.

وهذا النوع من المقاييس غير معروف في المقاييس النفسية والتربوية إلا في حالات قليلة جداً مثل بعض الصفات النفسية الجسمية مثل زمن الرجع. ويجب أن نميز بين البيانات الكمية والبيانات الوصفية. إذ تنتج البيانات الكمية عن استخدام مقاييس الرتبة أو مقاييس المسافة أو المقاييس الاسمية، أما المتغيرات الوصفية فتتضمن تقسيم البيانات أو توزيعها في فئات من المستوى الاسمي، وعندما نستخدم هذه الفئات فإننا نهتم بعدد الأفراد الذين يحتلون كل فئة أي تكرارات الفئات. وكثير من العمليات الإحصائية التي نستخدمها بالنسبة للمتغيرات الكمية، لا يمكن استخدامها استخداماً ذا معنى مع البيانات التي تتكون من تكرارات. وذلك يجب على الباحث أن يعرف نوع البيانات التي لديه قبل أن يتخذ قراراً بنوع التحليل الإحصائي الذي يستخدمه.

نلاحظ أن القياسات التي تقيس مستويات تلك الصفات يمكن إجراء جميع العمليات الحسابية عليها، واستخدام الطرق الإحصائية الوسيطية.

مثال (5): قياس متغير تركيز السكر في الدم هو من المستوى النسبي.

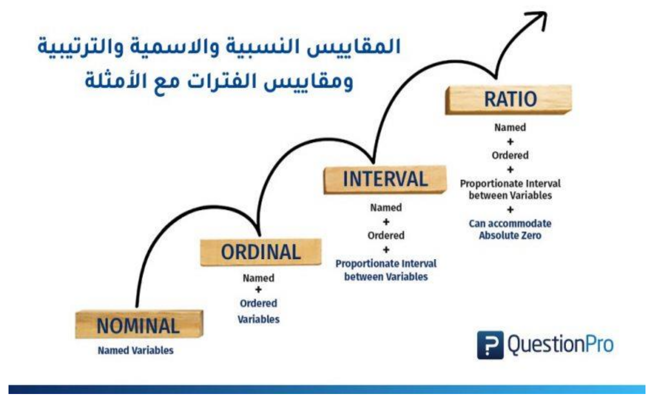
مثال: المخطط ادناه يوضح مخطط الساق والأوراق لعلامات 25 طالب) العلامة من 100 (. حيث أن الساق يمثل خانة العشرات، والأوراق تمثل خانة الآحاد. فمثلاً العلامات 59،56،55،55) هي الأقل في مجموعة العلامات(تم تمثيلها ضمن الساق الأول وهو العدد) 5(، والأوراق تضمنت الأرقام 5، 5، 6، 9 .بينما مثا الأرقام 100 ، 100 هما العلامتين الاعلى في المجموعة. والمكونة من ثلاث خانات، نخصص الخانتين الأوليتين 10 كساق، ونمثل الخانة الأخيرة بالورقة.

أمثلة المقياس النسبي: الأسئلة التالية تندرج ضمن فئة المقياس النسبي:

- كم يبلغ طول إبنتك حاليا؟
- أقل من 5 قدم
- 5قدم و1 إنش – 5 قدم و5 إنش
- 5قدم و6 إنش – 6 قدم

- أكثر من 6 قدم
- ما هو وزنك بالكيلوغرام؟
- أقل من 50 كيلوغرام
- 51 – 70كيلوغرام
- 71 – 90كيلوغرام
- 91 – 110كيلوغرام
- أكثر من 110 كيلوغرام

اعرف عن: مقياس الفترات مقارنة بالمقياس النسبي



1 – 4– بعض التطبيقات الهامة في الإحصاء:

تعد طرائق التحليل الإحصائية جزءاً هاماً من طرائق البحث العلمي مما أدى إلى استخدامها على نطاق واسع وبخاصة طرائق تحليل المتغيرات المتعددة التي يكثر تطبيقها عند دراسة مشاكل العلوم الطبيعية والطبية. سنستعرض بعض المشاكل الواقعية التي تستخدم فيها طرائق تحليل المتغيرات المتعددة بنجاح مما يسمح لنا أن نتبين مدى تنوع هذه المشاكل وكثرتها.

1 – علم الأحياء:

مثال (6): من المهم عند تربية وتحسين النباتات اختيار أنواع من النبات تستخدم في استنباط أنواع جديدة ذات مزايا وخواص لم تكن تتمتع بها الأنواع السابقة. ويهدف عالم النبات هنا إلى التوصل إلى أكبر عدد من المكاسب الوراثية في أقل وقت

ممكن. ففي برنامج لتحسين نبات الفاصوليا حُوِّلت المتغيرات الخاصة بالبروتين الذي يحتويه النبات وكمية المحصول إلى مؤشر كمي يستخدم في اختيار أنواع معروفة من النبات بهدف تحسينها واستنباط أنواع جديدة منها. ولقد تم التوصل إلى هذا المؤشر الكمي باستخدام طرائق تحليل المتغيرات المتعددة. (الهدف هنا هو التوصل إلى مؤشر كمي ليحل محل متغيرات عديدة ، أي تخفيض البيانات) .

2 – دراسات بيئـية:

مثال (7): أجريت دراسات موسعة على درجة تركز ملوثات الهواء في مدينة حمص. في إحدى هذه الدراسات، أخذت قياسات يومية عن سبع متغيرات مرتبطة بتلوث الهواء خلال فترة زمنية ممتدة. ولقد تركز الاهتمام على معرفة ما إذا كانت مستويات تلوث الهواء ثابتة تقريباً خلال أيام الأسبوع أو ما إذا كان هناك فرق واضح بين مستويات تلوث الهواء خلال أيام الأسبوع ومستوياته خلال أيام العطلة الأسبوعية. كذلك كان من بين أهداف الدراسة معرفة ما إذا كان من الممكن تلخيص البيانات الضخمة التي تم جمعها بطريقة تمكن من فهمها وتفسيرها. (الهدف هنا هو إجراء اختبارات فروض وتخفيض البيانات) .

3 – الطب:

مثال (8): أجريت دراسة لمعرفة مدى استجابة مرضى السرطان للعلاج بالأشعة حيث أخذت بيانات عن 6 متغيرات في عينة من 98 مريضاً. ونتيجة لصعوبة فهم وتفسير البيانات التي جمعت عن المتغيرات الست في وقت واحد فإنه أصبح من الضروري الحصول على مقياس أبسط لقياس مدى استجابة المرضى لهذا النوع من العلاج.

ولقد استخدمت طرائق تحليل المتغيرات المتعددة للوصول إلى مثل هذا المقياس وذلك باستخدام أغلب البيانات المتاحة من العينة. (الهدف هو تخفيض البيانات) .

مثال (9): يمكن تسجيل رد الفعل المعاكس للمنبهات البصرية (مثل الضوء المبهر) من جمجمة الإنسان مباشرة وذلك باستخدام الحاسب الآلي. ويشار إلى هذا الأسلوب بالأحرف VECA وفي دراسة طبية لمعرفة تأثير تصلب الأنسجة المتعدد على الجهاز البصري استخدم تحليل المتغيرات المتعددة لمعرفة ما إذا كان استخدام أسلوب VECA يعتبر عملياً ويمكن الاعتماد عليه في تشخيص أمراض الجهاز البصري. (الهدف هنا هو التصنيف، أي الوصول إلى مقياس كمي يمكن بواسطته فصل الأشخاص الذين يعانون من تصلب الأنسجة المتعدد الذي يؤدي إلى أمراض في الجهاز البصري عن هؤلاء الذين لا يعانون من هذا المرض) .

4 – علم النفس:

مثال (10): تقترح نظريات حديثة في علم النفس أن التركيب الوظيفي للمجتمع الأمريكي يتحدد بناء على بعد اجتماعي اقتصادي هام بالإضافة إلى أبعاد أخرى تأثيرها ضئيل وغير معروفة بينما تقترح نظريات أخرى أنه يتحدد بناء على ثلاثة أبعاد معرفة تماماً هي (1) احتياجات العمل (2) نظام العمل (3) العائد . ولمعرفة أي من الاتجاهين السابقين يعتبر ملائماً، أخذت بيانات عن 25 متغيراً من 583 وظيفة وتم تحليلها باستخدام طرائق تحليل المتغيرات المتعددة.(لاحظ أن الهدف هنا هو اختبار الفرض القائل بأن التركيب الوظيفي للمجتمع الأمريكي يتحدد بناء على بعد واحد في مقابل الفرض القائل أنه يتحدد بناء على ثلاثة أبعاد) . تقترح نظريات حديثة في علم النفس أن التركيب الوظيفي للمجتمع الأمريكي يتحدد بناء على بعد اجتماعي اقتصادي هام بالإضافة إلى أبعاد أخرى تأثيرها ضئيل وغير معروفة بينما تقترح نظريات أخرى أنه يتحدد بناء على ثلاثة أبعاد معرفة تماماً هي (1) احتياجات العمل (2) نظام العمل (3) العائد . ولمعرفة أي من الاتجاهين السابقين يعتبر ملائماً، أخذت بيانات عن 25 متغيراً من 583 وظيفة وتم تحليلها باستخدام طرائق تحليل المتغيرات المتعددة.(لاحظ أن الهدف هنا هو اختبار الفرض القائل بأن التركيب الوظيفي للمجتمع الأمريكي يتحدد بناء على بعد واحد في مقابل الفرض القائل أنه يتحدد بناء على ثلاثة أبعاد) .

5 – الاقتصاد والتجارة:

مثال (11): استخدمت البيانات المتاحة عن 6 من المتغيرات المحاسبية والمالية للوصول إلى نموذج إحصائي لمساعدة المهتمين بالنشاط التأميني للتعرف على شركات التأمين التي تعاني من مشاكل السيولة المالية، وباستخدام هذا النموذج يمكن تحديد ما إذا كانت الشركة تعاني من مشاكل السيولة أو لا حتى يمكن مساعدة الشركات التي تواجه مثل هذه المشاكل واتخاذ الإجراءات المناسبة لمنع إفلاسها. (الهدف هنا هو التوصل إلى قاعدة للتصنيف يمكن بها التمييز بين الشركات التي تعاني من مشاكل السيولة وتلك التي لا تعاني منها) .

6 – الرياضة والتعليم:

مثال (12): يهتم المختصون بالألعاب الأولمبية بتحليل مسابقات المضمار على أمل التعرف

على المهارات الأساسية اللازمة لكل مسابقة. جُمعت بيانات عن ثُمَّان مباريات عُشارية أولمبية مختلفة واستخدمت طرائق تحليل المتغيرات المتعددة بهدف التعرف على العوامل الجسمانية التي تفسر نتائج هذه المباريات العُشارية. ولقد بينت نتائج الدراسة أنه يمكن تفسير نتائج المباريات بناء على العوامل الجسمانية التالية: سرعة الجري، قوة الذراعين، قوة الرجلين، والقدرة

على التحمل. (الهدف هنا هو تحديد مدى اعتماد متغيرات مشاهدة [نتائج مسابقات المضمار] على عدد أقل من المتغيرات [العوامل الجسمانية]) .

مثال (13): قام أحد المحللين الرياضيين بإجراء دراسة على نتائج ألعاب الفرق الرياضية السورية بكرة القدم، وذلك من خلال نتائج ألعاب الفرق خلال خمسة مواسم مختلفة في مباريات الدوري التي تقام سنوياً وأخذ المباريات التي أقيمت خارج أرضها. وقد بينت نتائج الدراسة أنه يمكن تبيان فيما إذا كان هناك اختلاف بين أداء الفرق السورية الكبرى عندما تلعب خارج أرضها، وذلك على أساس التصميم تام العشوائية. كما ويمكننا ترتيب هذه الفرق السابقة حسب الأداء الأفضل، ثُمَّ تبيان أياً من الفرق السابقة التي تختلف عن بعضها بناءً على الاختبارات التي تعرفها (سرعة الجري، قوة الرجلين، والقدرة على التحمل مثلاً).

مثال (14): غالباً ما تستخدم نتائج اختبار القدرات المدرسية (SAT) ونتائج الدراسة في المرحلة الثانوية كمؤشر لمدى النجاح في المرحلة الجامعية. جمعت بيانات عن خمسة متغيرات عن المرحلة الثانوية (من بينها نتائج اختبار القدرات المدرسية الشفوي والكمي ونتائج الدراسة في السنتين الأخيرتين من المرحلة الثانوية) وأربعة متغيرات عن المرحلة الجامعية (درجات دراسة أربع مواد مختلفة) وذلك لمعرفة مدى فائدة استخدام متغيرات المرحلة الثانوية للتنبؤ بالأداء في المرحلة الجامعية . (إن هدفنا هو التنبؤ بالأداء في المرحلة الجامعية باستخدام متغيرات المرحلة الثانوية . ويمكننا أيضاً استخدام نتائج هذه الدراسة لتصنيف الطلبة إلى طلبة يتوقع نجاحهم في الدراسة الجامعية وطلبة لا يتوقع نجاحهم فيها) .

1-5- مصادر جمع البيانات Collection of Data:

يتم جمع البيانات من مصدرين أساسيين، وهما:

1-المصدر الرسمي والتاريخي: وهو أن تؤخذ البيانات الإحصائية من السجلات المحفوظة في الهيئات والمؤسسات والوزارات المختلفة، ويمكن معرفة البيانات الإحصائية المختلفة لدولة ما في مجالات الصحة والتعليم والاقتصاد والنشاطات الأخرى من سجلات هيئة الأمم المتحدة، أو المؤسسات الحكومية، أو الهيئات الدولية الأخرى.

2-المصدر الميداني: يتم جمع البيانات الإحصائية بطريقتين رئيسيتين هما:

آ -**طريقة البحث الشامل:** وتقتضي هذه الطريقة إجراء القياسات أو أخذ البيانات من جميع الوحدات أو الأفراد الذين لهم علاقة بموضوع الدراسة.

ب -**طريقة المعاينة:** يتم أخذ البيانات من المجتمع الإحصائي وذلك وفق طريقة سحب العينات ويتم ذلك عن طريقة تصميم استبيان إحصائي لموضوع الدراسة، وتؤخذ المعلومات عن طريقة:

1 – **المقابلة الشـــخصـــية:** يقوم جامع البيانات بإجراء مقابلة مع الأفراد المراد جمع بيانات منهم وتســـجيل إجاباتهم على استمارة خاصة ندعوها استبانة تحتوي على مجموعة من الأسئلة المطلوب الإجابة عنها. وهذه الطريقة تتيح لجامع البيانات الحصـول على إجابات دقيقة، وذلك لإمكانية توضـيح الأسئلة للفرد موضـع الدراسـة، ومراقبة رد فعله على بعض الأسـئلة، وتمتاز هذه الطرق بارتفاع نســبة المســتجيبين وذلك لإمكانية مدالقتهم. أما عيوب هذه الطريقة فهي أن جامع البيانات قد يكون مصــدراً من مصــادر التحيز بسـبب توجيه الفرد إلى إجابات معينة سـواءً عن طريق الإعجاب أم الاسـتنكار لبعض الأمور بحيث يؤثر في إجاباته. كما أن بعضهم قد يسجل بيانات (إجابات) خاطئة أو يقوم بتزوير الإجابات ، وذلك دون مقابلة أي فرد فعلياً، فيملأ الاستمارة بنفسه كما يرغب أو يقوم هو بالإجابة عن الأسئلة وملء الاستمارة بغية تسجيل عدد أكبر من الاســتمارات وبأقصــر وقت ممكن، لهذا لا بد من تدريب العاملين بشــكل جيد والتدقيق عليهم ومراقبتهم. كما أن تكلفة هذه الطريقة عالية نسبةً لغيرها من الطرق. وهذه الطريقة تستخدم في المجتمعات التي ترتفع فيها نسبة الأمية.

2 – **طريقة الهاتف:** يتم الحصول على البيانات بطرح الأسئلة عن طريق الهاتف للتقليل من التكلفة وتوفير الجهد والوقت. ومن مساوئها الطريقة أنّها لا تشمل جميع أفراد المجتمع؛ لأنها تستثني جميع الأفراد الذين لا يملكون هواتف، وبذلك يكون الإطار ناقصاً. وهذه الطريقة قد تكون جيدة إذا كان جميع أفراد المجتمع موضع الدراسة مشتركين بالهاتف..

3 – **طريقة البريد أو البريد الإلكتروني:** ترسـل الاستمارات بالبريد للأفراد موضــع الدراسـة لتعبئتها وإعادتها. وهذه الطريقة تعتبر من أقل الطرق كلفة في الحصــول على المعلومات، ولكن من عيوبها أن اسـتجابات الأفراد تكون بطيئة وقليلة وغير كاملة أو غير مفهومة بل غير موثوقة، لذلك تكون البيانات غير دقيقة. ولتشــجيع الأفراد على الاســتجابة يجب تصــميم الاستمارة على شـكل دقيق وبسـيط وجذاب يشـجع على الاسـتجابة، كما يجب دفع أجور البريد أو تقديم حوافز معينة تدفع الفرد وتحفزه لملء الاســـتمارة وإعادتها. ومن أهم عيوب هذه الطريقة قلة الردود، كما أنه من الممكن أن يتطفل أشـــخاص غير معنيين ولا يمثلون مجتمع الدراسة فيقوموا بالإجابة عن الأسئلة، وهذا مصدر تحيز آخر للبيانات..

4 – **طريقة الإنترنت وطرائق التواصل الاجتماعي:** يمكن طرح بعض الأسئلة أو بعض المواضيع للمناقشة على صفحات الويب ونطلب من الراغبين في المشـاركة والإجابة أو إبداء الرأي في الموضـوع المدروس. فيقوم متصـفح الإنترنت بالإجابة أو إبداء الرأي، وتصــلنا الإجابات خلال وقت قصــير تمتاز هذه الطريقة ببســاطتها وقلة تكاليفها وســرعتها، لكن من أهم مســاوئها أن العينة متحيزة ولا تشــمل المجتمع، بل هي مقتصــرة على مســتخدمي الإنترنت والمشــاركين في المنتديات الاجتماعية..

5 – **الهواتف المحمولة:** يمكن أيضــاً طرح الأسـئلة وابداء رأي الأفراد عن طريق الهواتف المحمولة لنصــل إلى مشـتركي خدمة الهواتف المحمولة. فهذه الطريقة قد تكون أفضـل من سـابقتها؛ لأنها تشـمل شـريحة أوسـع من المجتمع، فهي تغطي

كل الأشـــخاص المشـــتركين في هذه الخدمة. كذلك لا بد من تقديم بعض الحوافز التي تدفع الأفراد وتحفزهم للرد على الأسئلة، وذلك بصراحة وصدق.

6 – **الملاحظة أو المشـــاهدة:** من أقدم الطرق المســـتخدمة لجمع البيانات لمراقبة كثير من الظواهر ولجمع بيانات عن سلوك الأفراد وعن تفاعل الأفراد وكذلك عن البيئة المحيطة، ولاسيّما تلك التي يصـعب سؤال الأفراد موضـع الدراسـة عنها مثل الأطفال أو الحيوانات ... إلى آخره أو عند مراقبة ظاهرة معينة خلال فترات زمنية مثل كميات الأمطار، سـرعة الرياح ـ أعداد حوادث السير على طريق... إلى آخره. وتتم الملاحظة بتعيين أشخاص مدربين للمراقبة وتسجيل ملاحظاتهم. ومن مساوئها أيضاً الوقت الطويل والكلفة العالية وتحيز المراقب أو الملاحظ الذي قد يوجه النظر لسلوكيات بعينها دون غيرها.

7 – **التجربة:** نقوم بإجراء التجربة وبتســـجيل نتائجها، وذلك للحصـــول على معلومات مفيدة. فمثلاً لقياس تأثير بعض العوامل في منتج زراعي نقوم بتصـميم التجربة بطرق إحصـائية مثلاً لقياس شـدة تأثير نوع البذار ونوع التربة وطريقة الري في كمية المحصـول الزراعي. أو نقوم بمراقبة نتيجة إعطاء لقاح معين لمعالجة أحد الأمراض، وقد تكون التجربة هي قياس شدة تأثير نوع من الهرمونات في مجموعة من الفئران......

8 – **التســـجيل:** تســـتخدم بعض التقنيات الإلكترونية للمراقبة والعد وتســـجيل الملاحظات. فنقوم بتركيب كاميرات مراقبة للداخلين والخارجين من مكان ما أو نقوم بتركيب جهاز يقوم بعد المركبات على طريق محددة، ويمكن أن نطلب من الأفراد تسـجيل المعلومات في بعض السـجلات المخصـصـة لذلك، وتسـتخدم اليوم وعلى نطاق واسـع الفاكس والبريد الإلكتروني والإنترنت في جمع المعلومات وتسجيلها.

9 – **المجموعات البؤرية focus groups discussion** هي تقنية غير رسمية إلى حد ما يمكن أن تساعد في تقويم احتياجات المستخدمين ومشاعرهم على حد سواء. يدعى إلى المجموعة عادة 6–9 مشاركين لمناقشة الموضوع قيد الدراسة، وتستغرق المجموعة عادة ساعتين من النقاش، ويحكم نجاحها مدير للحوار مدرب بالقدر الكافي وبرتوكول نقاش مصوغ بشكل جيد وديناميكية مجموعة جيدة يعززها المحاور وطبيعة المشاركين.

10 – المقابلات المعمقة: تجرى المقابلات المعمقة in–depth interviews بأيد خبيرة باستخدام دليل للمقابلة، وعادة ما توفر بيانات غنية ومعمقة حول المواضيع قيد الاستكشاف، وتسمح في توضيح المسائل فتزيد في احتمال حدوث استجابات مفيدة. ومن مساوئها أنها تستغرق وقتاً طويلاً وتحتاج إلى تدريب جيد للمنفذين كما أن حجم المعلومات عنها يكون عادة كبيراً بسبب الحوار الطويل.

1–6– عرض البيانات Presentation of Data:

بعد الانتهاء من جمع البيانات الإحصائية بطريقة أو أكثر من الطرائق السابقة، فإنها تكون في صورة غير معبرة ومبعثرة، وقد يصعب استنتاج أي معلومات مفيدة منها. وقد تكون عبارة عن مجموعة أرقام غير مرتبة، أو مجموعة صفات لبعض الخصائص الموجودة في الاستبيان الإحصائي. ولتوضيح ذلك نعرض المثالين التاليين:

مثال (15): البيانات الآتية تبين التقديرات التي حصل عليها ثلاثون طالباً من طلاب جامعة البعث في إحدى السنوات:

B	A	C	D	B	B
B	A	D	D	D	C
A	B	B	D	B	A
D	B	A	A	B	C
C	B	D	D	A	C

مثـال (16): البيانات الآتية تمثل كمية سكر الدم لعينة مؤلفة من خمسين مريضاً راجعو مشفى المواساة خلال شهر كانون الأول الماضي يعانون من احتشاءات دماغية مختلفة:

180	90	205	110	250	280	210	200	290	275
62	80	195	110	245	190	200	215	285	270
222	225	185	120	330	298	190	205	150	150
240	250	338	130	160	140	180	210	160	160
230	240	175	125	170	175	195	215	130	110

البيانات الواردة في المثالين السابقين لا يمكن الاستفادة منهما في أية دراسة بهذا الشكل وذلك لعدم وضوحهما، وصعوبة الحصول على أي معالم من التقديرات في المثال (15)، وكمية سكر الدم في المثال (16)، فمثلاً البيانات السابقة بوضعها الحالي تجعل من الصعب التعرف على الطلاب الحاصلين على تقدير مشترك ممتاز (A) أو جيد جداً (B) ...، وكذلك الحال لا يمكننا معرفة متوسط كمية سكر الدم التي أخذت من عينة مؤلفة من خمسين مريضاً راجعو مشفى المواساة خلال شهر كانون الأول الماضي والذين يعانون من احتشاءات دماغية مختلفة بسهولة من بيانات المثال (16) بوضعها الحالي. لذلك أصبحت الحاجة إلى إيجاد طريقة لتنظيم وتلخيص مثل هذه البيانات في صورة سهلة، ضرورية جداً، حتى يمكننا دراستها، واستنتاج كل المعلومات المطلوبة بسهولة، ومن الطرائق المستخدمة لتلخيص البيانات ما يسمى التوزيعات التكرارية.

أولاً –جداول التوزيع التكرارية:

لتلخيص وتنظيم البيانات الوصفية نكون جدولاً مؤلفاً من ثلاثة أعمدة رأسية يكتب في بداية كل عمود عنوانه المناسب، يسمى مثل هذا الجدول جدول تفريغ البيانات ومنه نستنتج جدولاً آخراً يسمى جدول التوزيع التكراري، فمثلاً إذا كانت الدراسة هي التقديرات التي حصل عليها ثلاثون طالباً من طلاب جامعة البعث في إحدى السنوات فإننا نكتب كلمة التقدير في العمود الأول ثُمَّ يكتب تحت العنوان في العمود الأول كل الصفات، وهذه الصفات في هذه الحالة هي: A، B، C، D. أما في العمود الثاني فيكون العنوان هو إفراغ البيانات وفيه تسجيل القراءات على شكل خطوط رأسية مثل " | " فإذا ما وصل عدد الخطوط إلى أربع مثل " |||| " فإن الخط الخامس يكتب بشكل أفقي ليكوّن حزمة مثل " |||| " عدد عناصرها خمسة. وبعد تفريغ البيانات نقوم بعدّ جميع عناصر الحزم أمام كل صفة ونكتب العدد الناتج في العمود الثالث الذي يدل على التكرار، ويقصد بالتكرار عدد عناصر الظاهرة أمام كل صفة ~~من~~ الصفات الموجودة في العمود الأول. ومن هذا الجدول يصاغ جدول التوزيع التكراري المكون من عمودين الأول يشتمل على أسماء الصفات، والثاني التكرارات. ففي المثال الأول يكون جدول تفريغ البيانات بالشكل الآتي:

الصفة	إفراغ البيانات	التكرار
A	~~||||~~ ||	7
B	~~||||~~ ~~||||~~	10
C	~~||||~~ |||	8
D	~~||||~~	5
المجموع		30

لنحذف الآن العمود الثاني من الجدول السابق فإننا نحصل على جدول مكوّن من عمودين فقط يسمى جدول التوزيع التكراري كما هو موضح بالجدول الآتي:

الصفة	التكرار
A	7
B	10
C	8
D	5
المجموع	30

نلاحظ كذلك، أن أي جدول إحصائي يحتوي على عنوان يوضح نوعية الجدول، وطبيعة البيانات المعروضة فيه، كما هو موضح في الجدولين السابقين.

ولتلخيص وتنظيم البيانات الكمية فإننا نكوّن جدولاً مؤلفاً من ثلاثة أعمدة، حيث نستبدل الصفة في العمود الأول بما يسمى حدود الفئات ولإنشاء هذا الجدول نتبع الخطوات الآتية:

1 – نحدد مدى البيانات، ومن المثال (16) يكون المدى كالآتي:

$$R = \max x - \min x = 338 - 62 = 276$$

2 – نقسم المدى إلى عدد اختياري مناسب من الفئات (فئات نصف مفتوحة)، وعادة يتراوح عدد الفئات الاختياري من 5 إلى 15 فئة تقريباً، ففي المثال (16) نختار عدد الفئات، يساوي 7 فئات مثلاً.

3 – نحسب طول الفئة l ، وهو يساوي المدى مقسوماً على عدد الفئات المقترح، بحيث يقرّب الناتج إلى أقرب عدد صحيح، ففي المثال (16) السابق يكون طول الفئة معرفاً بالعلاقة:

$$l = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات المقترح}} = \frac{276}{7} = 39.4 \cong 40$$

وهناك عدة طرق لحساب عدد الفئات نذكر منها:

1– اقترح العالم ستورجز تطبيق المعادلة التالية في تحديد عدد الفئات:

$$k = 1 + 3.322 \log n$$

حيث k هو عدد الفئات، $\operatorname{Log} n$ هو اللوغاريتم العشري وn هو عدد التكرارات.

2– كما واقترح العالم يول yule تطبيق المعادلة التالية في تحديد عدد الفئات:

$$k = 2.5 \times \sqrt[4]{n}$$

حيث k هو عدد الفئات، $\sqrt[4]{n}$ هو الجذر الرابع لعدد التكرارات.

ففي هذه الحالة نجد عدد الفئات من العلاقة التالية:

$$k = 1 + 3.322 \log n = 1 + 3.322\, log(50)$$
$$= 1 + 3.322(1.69897) = 1 + 5.64 = 6.64 \cong 7$$

وفي الحالة الثانية نجد عدد الفئات يعطى بالعلاقة:

$$k = 2.5 \times \sqrt[4]{n} = 2.5 \times \sqrt[4]{50} = 2.5 \times 2.659 = 6.6475 \cong 7$$

وهو نفس الجواب الذي حصلنا عليه من العلاقة السابقة.

4 – نحدد بداية الفئة الأولى، وذلك بأخذ أصغر رقم في البيانات أو أي رقم يكون قريباً منه، ونسميه الحد الأدنى للفئة الأولى، وكذلك نحدد نهاية الفئة الأولى بإضافة طول الفئة إلى الحد الأدنى للفئة الأولى، مع الأخذ بعين الاعتبار أن الحد الأدنى ينتمي إلى الفئة بينما لا ينتمي
الحد الأعلى إلى الفئة ذاتها. وهكذا بالنسبة لباقي الفئات.

5 – نستخدم الخطوات السابقة، ونكوّن جدولاً مؤلفاً من ثلاثة أعمدة، ثُمَّ نستبدل الصفة بحدود الفئات في العمود الأول.

ففي المثال الثاني نحصل على جدول البيانات بالشكل الآتي:

حدود الفئات	إفراغ البيانات	التكرار
$[60 - 100[$	|||	3
$[100 - 140[$	𝍸 ||	7
$[140 - 180[$	𝍸 ||||	9
$[180 - 220[$	𝍸 𝍸 𝍸	15
$[220 - 260[$	𝍸 |||	8
$[260 - 300[$	𝍸 |	6
$[300 - 340[$	||	2
المجموع	**—**	**50**

وبحذف العمود الثاني من الجدول السابق نحصل على جدول التوزيع التكراري للبيانات الكمية:

حدود الفئات	التكرار
$[60 - 100[$	3
$[100 - 140[$	7
$[140 - 180[$	9
$[180 - 220[$	15
$[220 - 260[$	8
$[260 - 300[$	6
$[300 - 340[$	2
المجموع	50

6 - يمكننا إضافة عمود جديد وهو مركز الفئة، وهو يساوي نصف مجموع الحدين الأدنى والأعلى للفئة. كما هو مبين في الجدول الآتي:

مراكز الفئات	التكرار	حدود الفئات
80	3	$[60-100[$
120	7	$[100-140[$
160	9	$[140-180[$
200	15	$[180-220[$
240	8	$[220-260[$
280	6	$[260-300[$
320	2	$[300-340[$
	50	**المجموع**

7 - وبإضافة عمودين جديدين لجدول التوزيع التكراري السابق وهما التكرار النسبي والمئوي، وذلك لأنه يطلب منّا أحياناً معرفة الفرق بين ظاهرتين أو أكثر بنفس الخاصية في فترات مختلفة، أو مقارنة الظواهر المختلفة لنفس الخاصية في نظامين مختلفين. ويعرّف التكرار النسبي لفئة ما بأنه نسبة تكرار هذه الفئة إلى مجموع التكرارات، وأن التكرار المئوي هو عبارة عن حاصل ضرب التكرار النسبي بـ 100.

فلو عدنا إلى المثال (16) لوجدنا التكرار النسبي والمئوي مبينين في الجدول الآتي:

التكرار المئوي	التكرار النسبي	التكرار	حدود الفئات
6	0.06	3	$[60-100[$
14	0.14	7	$[100-140[$
18	0.18	9	$[140-180[$
30	0.30	15	$[180-220[$
16	0.16	8	$[220-260[$
12	0.12	6	$[260-300[$
4	0.04	2	$[300-340[$
100	**1**	**50**	**المجموع**

8 - يمكننا إنشاء جدولين جديدين آخرين هما جدول التوزيع التكراري الصاعد وجدول التوزيع التكراري الهابط، وذلك لأنه قد يكون المطلوب معرفة عدد التكرارات للظاهرة المدروسة التي تزيد أو تقل عن قيمة معينة.

ولإنشاء جدول التوزيع التكراري الصاعد نأخذ تكرار الفئة الأول وهو التكرار الصاعد الأول ثُمَّ مجموع تكراري الفئة الأولى وتكرار الفئة الثانية وهو التكرار الصاعد الثاني وهكذا ... كما ويمكن إنشاء جدول التوزيع الهابط وذلك بأخذ تكرار الفئة الأخيرة وهو التكرار الهابط الأول ثُمَّ حاصل طرح هذا التكرار من تكرار الفئة الأولى وهو التكرار الهابط الثاني وهكذا ... .

وسوف نوضح ذلك بالشكل التالي:

حدود الفئات	التكرار	التكرار الصاعد $f_i \uparrow$	التكرار الهابط $f_i \downarrow$
$[60-100[$	3	3	50
$[100-140[$	7	10	47
$[140-180[$	9	19	40
$[180-220[$	15	34	31
$[220-260[$	8	42	16
$[260-300[$	6	48	8
$[300-340[$	2	50	2
المجموع	**50**	—	—

ملاحظات:

أ – عند كتابة الفئات فإنه يذكر الحد الأدنى والأعلى لكل فئة إذا كان المتغير منفصل، ويحدد أحد الحدين ويحدد الثاني ضمنياً إذا كان المتغير مستمر.

ب – عند تفريغ البيانات فإنه يجب أن تنتمي كل مفردة إلى فئة واحدة فقط.

ج – يفضل استخدام الفئات المتساوية الطول، إلا أنه في بعض الحالات يمكن استخدام الفئات غير المتساوية، من هذه الحالات ما يلي:

1– إذا كان الغرض من الدراسة هو الاهتمام ببعض الفئات والتركيز عليها وإهمال باقي الفئات، فيمكن عندها دمج الفئات التي لا تهم الباحث في فئة واحدة.

2– إذا كان تكرار بعض الفئات صغيراً مقارنة بباقي الفئات، فيمكن دمج هذه الفئات معاً.

ثانياً –التمثيل البياني للتوزيعات التكرارية:

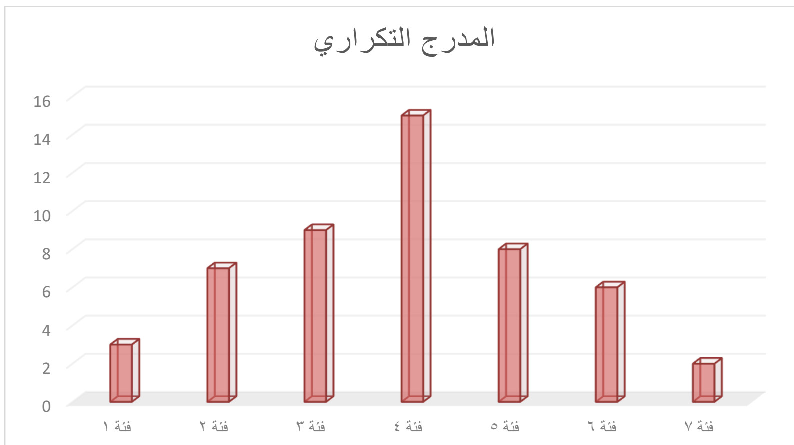
تحدثنا في الفقرات السابقة عن طرائق تنظيم البيانات وتلخيصها بواسطة جداول التوزيع التكرارية، ورأينا أن من مساوئ الجداول التكرارية هو أن البيانات تفقد هويتها نظراً لدمج عدة بيانات معاً في فئة واحدة، وأن هناك صعوبة في حساب أحد المقاييس الإحصائية عندما تكون الفئة الأخيرة مفتوحة، أما الآن فسوف نستعرض بعض أهم طرائق التمثيل البياني وهي:

1 –المدرج التكراري: يتألف المدرج التكراري من أعمدة بيانية (مستطيلات متلاصقة أو متباعدة) لها العرض نفسه مرسومة في مستوى للإحداثيات الديكارتية، حيث نمثل حدود الفئات على المحور الأفقي وتكرارات هذه الفئات على المحور العمودي.

ملاحظة: يمكن أن تكون الأعمدة البيانية عبارة عن متوازي مستطيلات متلاصقة أو متباعدة، وفي حال تمثيل مجموعتين من البيانات أو أكثر نقوم بتلوين هذه الأعمدة البيانية بألوان مختلفة وذلك لكي نستطيع تمييز هذه البيانات ومن ثُمَّ المقارنة بينهما.

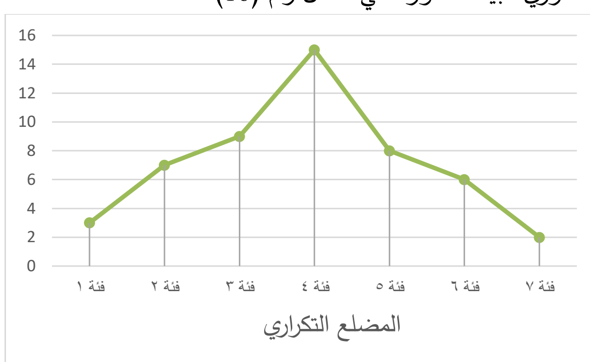
وسوف نوضح ذلك في المثال الآتي:

مثال (17): ارسم المدرج التكراري للبيانات الواردة في المثال رقم (16):



2 –المضلع التكراري: المضلع التكراري هو عبارة عن خطٍ منكسرٍ مؤلفٍ من مجموعة من القطع المستقيمة والمتلاصقة التي تصل بين منتصفات القواعد العليا للمستطيلات المرسومة في المدرج التكراري، وسوف نوضح ذلك في المثال الآتي:

مثال (18): ارسم المضلع التكراري للبيانات الواردة في المثال رقم (16):



3 –المنحني التكراري: المنحني التكراري هو مضـــلع تكراري يكون فيه الخط المنكســـر قريباً من خطاً منحنياً، أي أنه إذا صـغرت مسافة الفئة، وفي الوقت نفسـه زاد عدد المتغيرات، فعندئذٍ يتقارب المضـلع التكراري من خط منحن يدعى المنحني التكراري. ويعتبر المنحني التكراري من أهم الخطوط البيانية المتعلقة بالتوزيعات التكرارية، ويمكن رســـمه باســـتبدال الخط المنكسر في المضلع التكراري بمنحنٍ يصل أغلب النقاط كما هو موضح في المثال الآتي:

مثال (19): أرسم المنحني التكراري للبيانات الواردة في المثال رقم (16):

ملاحظة (1): يمكن رسم المدرج، المضلع، المنحني التكراري الصاعد والهابط للبيانات الواردة في جدول التوزيع، ويسمى مثل هذا المدرج، المضلع، المنحني الصاعد أو الهابط.

ملاحظة (2): يمكن تمثيل ظاهرتين مختلفتين ودراسة الفرق بينهما، من خلال رسم المدرج أو المضلع أو المنحني التكراري لكل من الظاهرتين في شكل واحد.

4 – مخطط الساق والورقة:

هناك أسلوب آخر لتنظيم البيانات أعده (Tukey) يشبه أسلوب الجداول التكرارية والأعمدة، وهو مخطط الساق والورقة، فقد استبدل الأعمدة بالأعداد نفسها، فالساق هو القسم الصحيح من العدد والورقة القسم العشري.

مثال (20): يبين الجدول التالي قيم المتغير الكمي الدال على حجم الزفير القسري بالثانية لخمسين طالباً من طلاب كلية الطب بجامعة القلمون الخاصة:

2.85	2.98	3.04	3.10	3.10	3.19	3.30	3.39	3.42	3.48
3.50	3.54	3.52	3.54	3.57	3.60	3.69	3.75	3.78	3.83
3.90	3.96	4.05	4.08	4.10	4.14	4.14	4.16	4.20	4.20
4.30	4.30	4.32	4.44	4.47	4.47	4.50	4.56	4.56	4.68
4.70	4.78	4.80	4.80	4.90	5	5.1	5.1	5.2	5.3

والترتيب الآتي هو مخطط الساق والورقة لتلك البيانات

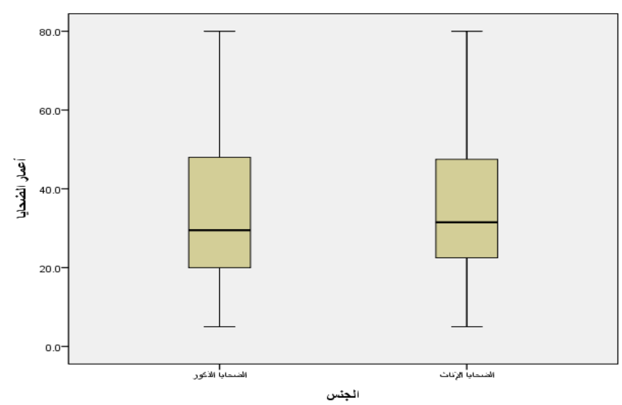
2 | 8 9
3 | 0 1 1 1 3 3 4 4 5 5 5 5 5 6 6 7 7 8 9 9
4 | 0 0 1 1 1 1 2 2 3 3 3 4 4 4 5 5 5 6 7 7 8 8 9
5 | 0 1 1 2 3

ففي الساق الأولى 2 مثلاً ورقتان 8 و9 تمثلان العددين 2.8 و2.9 للدلالة على القياسين 2.85 و2.98 من العينة ومخطط الساق والورقة شكل بسيط يوضح لنا كيفية توزع القياسات.

5 – المخطط الصندوقي: نرغب في كثير من التطبيقات بعرض توزيع البيانات بشكل مبسط لمقارنة عينتين أو أكثر، حينئذٍ قد يكون من المفيد استخدام الربيعيات. وكما نعلم لكل مجموعة من القياسات الترتيبية (على الأقل) ثلاث ربيعيات، الربيعي الأول والثاني والثالث، ويعرَّف كل ربيعي بالقياس الذي تسبقه على الترتيب 25% و 50% و75% من القياسات بعد ترتيبها تصاعدياً إذ تستخدم هذه المقاييس لوصف توزيع وتشتت البيانات.

فالمخطط الصندوقي عبارة عن صندوق ذي قرنين ممتدين بشكل موازٍ للمحور الشاقولي الذي تتوزع عليه القياسات، وتشير حافتا الصندوق السفلية والعلوية للربيعيين الأول والثالث على الترتيب، وهذا يعني أن حافتي الصندوق تتضمنان نصف القياسات متوسطة القيم، ويفصل بينها خط أفقي يمثل الوسيط (الربيعي الثاني). وتقع ربع القياسات ذات القيم الأصغر تحت الصندوق وربع القياسات ذات القيم الأعلى فوقه.

مثال (21): بهدف مقارنة تشتت أعمار ضحايا حوادث الطرق للذكور والإناث رسمنا المخطط الصندوقي لعينتي الذكور والإناث انظر الشكل التالي:



6 –الرسـوم الدائرية: هي عبارة عن دائرة تقسـم إلى قطاعات زاوية أو زوايا مركزية بحيث إن مسـاحة كل قطاع زاوي أو قيمة كل زاوية مركزية تتناسب مع عدد التكرارات وتحسب مساحة القطاع الزاوي المقابل لفئة ما أو الزاوية المركزية المقابلة لفئة ما من العلاقة الآتية:

$$\text{الزاوية المركزية المقابلة لفئة ما} = \frac{\text{التكرار المقابل لهذه الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}} \times \mathbf{360}$$

مثال (22): يمثل الجدول التالي مساحات القارات الست مأخوذة بالمليون كيلو متر مربع والمطلوب استخدم الرسوم الدائرية للبيانات الواردة في هذا الجدول:

القارة	المساحة بالمليون كم2
أستراليا ونيوزيلندا	8.5
أفريقيا	30.3
أسيا	47.4
أوربا	4.9
أمريكا الشمالية	24.3
أمريكا الجنوبية	17.9

الحل:

لتمثيل هذه البيانات، نقوم بإيجاد الزاوية المركزية للقطاع المقابل لكل قارة من العلاقة التالية:

$$\text{الزاوية المركزية المقابلة لفئة ما} = \frac{\text{التكرار المقابل لهذه الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}} \times 360$$

لنحسب مجموع التكرارات بالشكل:

$$\text{مجموع التكرارات} = 30.3 + 47.4 + 4.9 + 24.3 + 17.9 + 8.5 = 133.3$$

وبالتالي فإن الزوايا المركزية المقابلة للقطاعات تصبح بالشكل:

$$\text{الزاوية المركزية للقطاع المقابل لقارة أفريقيا} = \frac{30.3}{133.3} \times 360 = 82$$

$$\text{الزاوية المركزية للقطاع المقابل لقارة أسيا} = \frac{47.4}{133.3} \times 360 = 128$$

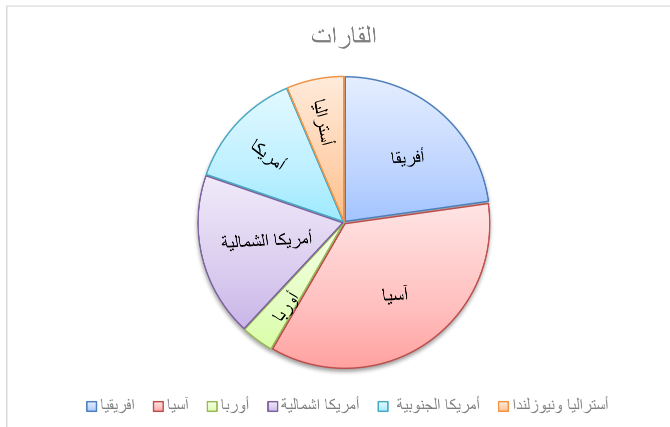
$$\text{الزاوية المركزية للقطاع المقابل لقارة أوروبا} = \frac{4.9}{133.3} \times 360 = 13$$

$$\text{الزاوية المركزية للقطاع المقابل لقارة أمريكا الشمالية} = \frac{24.3}{133.3} \times 360 = 66$$

$$\text{الزاوية المركزية للقطاع المقابل لقارة أمريكا الجنوبية} = \frac{17.9}{133.3} \times 360 = 48$$

الزاوية المركزية للقطاع المقابل لقارة أستراليا ونيوزيلندا $= \frac{8.5}{133.3} \times 360 = 23$

نقوم الآن برسم دائرة بحيث يمكن رسم الزوايا المركزية المقابلة لكل قارة بالشكل:



مثال (23): استخدم الرسوم الدائرية للبيانات الواردة في تمثيل بيانات هذا الجدول:

حدود الفئات	التكرار
$[60 - 100[$	3
$[100 - 140[$	7
$[140 - 180[$	9
$[180 - 220[$	15
$[220 - 260[$	8
$[260 - 300[$	6
$[300 - 340[$	2
المجموع	**50**

الحل: لتمثيل هذه البيانات، نقوم بإيجاد الزاوية المركزية للقطاع المقابل لكل فئة من العلاقة التالية:

$$\text{الزاوية المركزية المقابلة لفئة ما} = \frac{\text{التكرار المقابل لهذه الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}} \times \mathbf{360}$$

لنحسب مجموع التكرارات بالشكل:

$$\text{مجموع التكرارات} = 3 + 7 + 9 + 15 + 8 + 6 + 2 = 50$$

وبالتالي فإن الزوايا المركزية المقابلة للقطاعات تصبح بالشكل:

الزاوية المركزية للقطاع المقابلة للفئة الأولى $= \frac{3}{50} \times 360 = 21.6$

الزاوية المركزية للقطاع المقابلة للفئة الثانية $= \frac{7}{50} \times 360 = 50.4$

الزاوية المركزية للقطاع المقابلة للفئة الثالثة $= \frac{9}{50} \times 360 = 64.8$

الزاوية المركزية للقطاع المقابلة للفئة الرابعة $= \frac{15}{50} \times 360 = 108$

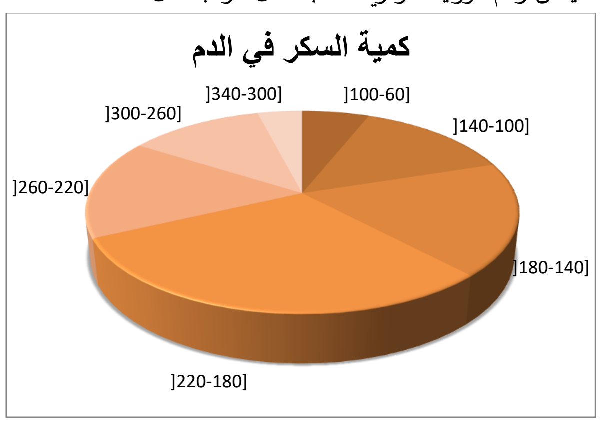
الزاوية المركزية للقطاع المقابلة للفئة آخرهامسة إلى $= \frac{8}{50} \times 360 = 57.6$

الزاوية المركزية للقطاع المقابلة للفئة السادسة $= \frac{6}{50} \times 360 = 43.2$

الزاوية المركزية للقطاع المقابل للفئة السابعة $= \frac{2}{50} \times 360 = 14.4$

نلاحظ أن مجموع هذه الزوايا المركزية يساوي 360 درجة

نقوم الآن برسم دائرة بحيث يمكن رسم الزوايا المركزية المقابلة لكل قارة بالشكل:



ثالثاً –محاسن الرسوم البيانية ومساوئها:

ترغب كثير من الهيئات والمؤسسات العامة في توضيح مظاهر التطور الذي تقوم به في كافة المجالات في صورة رسوم بيانية يمكن للشخص العادي استيعابها وفهمها بسهولة، إلا أن هذه الطريقة لها محاسن ومساوئ نذكر منها:

آ –محاسن الرسوم البيانية:

1–البساطة في قراءة البيانات وخاصة إذا كان عدد التكرارات كبيراً.

2–سهولة تذكر النتائج، حيث أن الرسوم البيانية تعطي فكرة أكثر ثباتاً من الأرقام أو الكلمات.

3–جذب الانتباه، وذلك عن طريق استخدام الألوان فإذا عني برسم الشكل البياني فمن السهل أن يجذب الانتباه إليه، ويبقى في الذاكرة لمدة أطول، بينما فإن الكثيرين لا يهتمون بعرض الجداول كثيراً.

ب –مساوئ الرسوم البيانية:

1– التضحية في دقة البيانات، إذ إن الأشكال توضح فقط التغيرات العامة، ولا تبين التفاصيل الدقيقة، لذا يفضل دوماً إرفاق الجداول مع الرسوم البيانية.

2 – تكون الرسوم البيانية أحياناً معقدة، إذا احتوت على مجموعات من البيانات المختلفة، أو تكون كثيرة التكاليف إذا كانت تحتوي على بيانات تحتاج إلى مقاييس رسم كبيرة.

7 – مخطط الانتشار :

1 – 7 – مقاييس النزعة المركزية (Measures of central tendency):

سبق وأن تحدثنا في الفقرات السابقة عن طرائق تنظيم البيانات الإحصائية وتلخيصها في جداول توزيع تكرارية، وتمثيلها بيانياً، ومع أن هذه الطرائق كانت مفيدة جداً في توضيح شكل التوزيعات التكرارية، إلا أنه لا يمكن استخدامها دوماً وخاصةً عند المقارنة بين ظاهرتين أو أكثر، لذا دعت الحاجة إلى إيجاد مقاييس عددية تقيس لنا الظاهرة المدروسة نستطيع من خلالها من المقارنة بين ظاهرتين أو أكثر. وهذه المقاييس التي سوف ندرسها في هذه الفقرة هي مقاييس النزعة المركزية وهي عبارة عن قيم مثلى تقترب منها معظم البيانات الإحصائية، أو تتركز حولها، أو تتوزع بالقرب منها.

أولاً –الوسط الحسابي: يُعد الوسط الحسابي من أهم مقاييس النزعة المركزية على الإطلاق وأبسطها لأنه يدخل في جميع عمليات التحليل الإحصائي.

1–الوسط الحسابي لبيانات غير مبوبة:

لتكن لدينا مجموعة من البياناتx_n، ... ،x_2،x_1 مأخوذة من مجتمع إحصائي ما، فإن الوسط الحسابي لهذه البيانات والذي نرمز له بالرمز $\overline{x}$ يعطى بالعلاقة الآتية:

$$\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1)$$

مثال (24): إذا علمت أن عدد الإجازات السنوية بالأيام التي حصل عليها بعض موظفو جامعة دمشق هو:14 ، 15 ، 18 ، 15 ، 14 ، 7 ، 18 ، 17 ، 18 ، 4 ، فأوجد الوسط الحسابي.

إن الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات يعطى بالعلاقة:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{14+15+18+15+14+7+18+17+18+4}{10} = \frac{140}{10} = 14 \quad \text{يوم}$$

2 – الوسط الحسابي من بيانات مبوبة:

لتكن لدينا مجموعة من البيانات موزعة وفق جدول توزيع تكراري مؤلفاً من r فئة. عندئذٍ يعرّف الوسط الحسابي لهذه البيانات بالعلاقة التالية:

$$\overline{x} = \frac{f_1x'_1+f_2x'_2+\cdots+f_rx'_r}{f_1+f_2+\cdots+f_r} = \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i x'_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} f_i x'_i \qquad (2)$$

حيث $f_1، f_2، \dots ، f_r$ تكرارات لفئات عددها r ومراكزها $x'_1، x'_2، \dots ، x'_r$ على الترتيب.

مثال (25): أوجد الوسط الحسابي لمجموعة البيانات الواردة في المثال رقم (16) وذلك في حالة البيانات غير المبوبة وفي حالة البيانات المبوبة ثُمَّ قارن بين النتيجتين.

1− الوسط الحسابي في حالة البيانات غير المبوبة:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{180+90+\cdots+110}{50} = \frac{9750}{50} = 195$$

2−الوسط الحسابي في حالة البيانات المبوبة:

لتسهيل الحسابات نشكل الجدول الآتي ثُمَّ نعوض في القانون فنجد:

حدود الفئات	التكرار f_i	مراكز الفئات x'_i	$f_i x'_i$
$[60-100[$	**3**	**80**	**240**
$[100-140[$	**7**	**120**	**840**
$[140-180[$	**9**	**160**	**1440**
$[180-220[$	**15**	**200**	**3000**
$[220-260[$	**8**	**240**	**1920**
$[260-300[$	**6**	**280**	**1680**
$[300-340[$	**2**	**320**	**640**
المجموع	50	-----	**9760**

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} f_i x'_i = \frac{9760}{50} = 195.2$$

نلاحظ أن الوسط الحسابي المحسوب بطريقة البيانات غير المبوبة يختلف عنه بطريقة البيانات المبوبة، وهذا الخلاف ناتج عن أن بعض البيانات تكون بعيدة بعض الشيء عن مراكز الفئات.

3 − الوسط الحسابي الموزون:

لتكن لدينا مجموعة من البيانات $x_1، x_2، \dots ، x_n$ مأخوذة من مجتمع إحصـــائي ما، وبفرض أن تكراراتها هي على الترتيب $f_1، f_2، \dots ، f_n$ فإن الوسط الحسابي لهذه البيانات والذي نرمز له بالرمز $\overline{x}$ يعطى بالعلاقة الآتية:

$$\overline{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_ix_i \qquad (3)$$

مثال (26): أوجد الوسط الحسابي المرجح لدرجات طالب في أربع مواد درجاتهم معطاة بالقيم 95، 80، 45، 60 وكانت ساعات الدراسة الأسبوعية لهذه المواد على الترتيب 4، 5، 2، 3 .

الحل: إن الوسط الحسابي يعطى بالعلاقة:

$$\overline{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}$$

$$=\frac{4\times95+5\times80+2\times45+3\times60}{4+5+2+3}=\frac{1050}{14}=75 \quad \text{درجة}$$

ملاحظة (3): يمكن اعتبار الوسط الحسابي لبيانات مبوبة وسطاً مرجحاً وذلك باستبدال مراكز الفئات $x'_1، x'_2، \dots ، x'_r$ بالبيانات $x_1، x_2، \dots ، x_n$ وتكرارات مراكز الفئات $f_1، f_2، \dots ، f_r$ بتكرارات البيانات $f_1، f_2، \dots ، f_n$ فنجد:

$$\overline{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}f_i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_ix_i$$

3–محاسن الوسط الحسابي ومساوئه:

آ – **محاسن الوسط الحسابي:**

1– سهولة حسابه في أية مجموعة من البيانات، لذا يعتبر من أشهر المتوسطات.

2– يأخذ جميع القيم في الحسبان، ولا يحتاج في حسابه إلى ترتيب البيانات.

3– إن وسط مجموعة من البيانات لا يتغير، وهذه ميزة هامة في أسلوب المعاينات.

4– مجموع انحرافات مجموعة من البيانات عن وسطها الحسابي يساوي الصفر دوماً، ومجموع مربعات انحرافاتها عن وسطها الحسابي أقل من مجموع مربعات الانحرافات عن أي عدد آخر.

ب – مساوئ الوسط الحسابي:

1– يتأثر بالقيم المتطرفة للبيانات مما يفقده معناه وأهميته.

2– لا يمكن حسابه في حالة البيانات الوصفية.

3– لا يساوي أياً من القيم الداخلة في حسابه، فقد يحتوي على عدد كسري لبيانات مكونة من أعداد صحيحة، وذلك في حالة البيانات المنفصلة، مثل عدد المواليد في مجتمع ما.

ثانياً – الوسيط: يعرَّف الوسيط لمجموعة من البيانات الإحصائية بأنه القيمة العددية التي تقسم تلك البيانات إلى مجموعتين متساويتين بعد أن نقوم بترتيب البيانات ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً.

1 –الوسيط للبيانات غير المبوبة:

لإيجاد الوسيط للبيانات غير المبوبة، نقوم بترتيب البيانات ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً، ويكون الوسيط هو القيمة التي يكون ترتيبها $\frac{n+1}{2}$ عندما يكون عدد البيانات فردياً.

أي أن الوسيط يعطى بالشكل: الوسيط = القيمة التي ترتيبها $\left(\frac{n+1}{2}\right)$

ويكون الوسيط هو القيمة الناتجة عن متوسط القراءتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$،$\frac{n}{2}+1$ عندما يكون عدد البيانات زوجياً. أي أن الوسيط يعطى بالشكل:

$$\text{الوسيط} = \frac{\text{القيمة التي ترتيبها}\left(\frac{n}{2}\right) + \text{القيمة التي ترتيبها}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}$$

مثال (27): أوجد الوسيط لعدد الإجازات المرضية السنوية بالأيام التي حصل عليها سبعة موظفين من موظفي جامعة القلمون الخاصة هي: 25، 15 ، 16 ، 20 ، 20 ، 24 ، 25.

الحل: نرتب البيانات ترتيباً تصاعدياً كما يأتي: 15 ، 16 ، 20 ، 20 ، 24 ، 25 ، 25.

لدينا عدد البيانات $n = 7$ يوماً وهو عدد فردي، ومن ثُمَّ فإن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

أي أن الوسيط هو القيمة الرابعة وهي القيمة 20 يوماً.

مثال (28): إذا كانت أطوال ثُمَّانية من طلاب جامعة القلمون الخاصة هي:

180، 172، 175، 179، 185، 170، 177، 182 بالسنتمترات، فأوجد الوسيط.

الحل: نقوم بترتيب هذه البيانات ترتيباً تصاعدياً كما يأتي:

170 ، 172 ، 175 ، 177 ، 179 ، 180 ، 182 ، 185

نلاحظ أن عدد البيانات هو 8 وهو عدد زوجي، لذلك فإن الوسيط هو القيمة الناتجة عن متوسط القراءتين:

$$\frac{n}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad , \quad \frac{n}{2}+1 = \frac{8}{2}+1 = 5$$

أي هو متوسط القيمتين الرابعة والخامسة ويساوي:

$$\frac{1}{2}(177+179) = 178 \quad \text{سم}$$

2 – الوسيط للبيانات المبوبة:

لإيجاد الوسيط لمجموعة من البيانات المبوبة نتبع الخطوات الآتية:

1– نوجد جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد.

2- نوجد ترتيب الوسيط وهو عبارة عن نصف مجموع القراءات أي $\frac{n}{2}$.

3- نحدد الفئة الوسيطية من جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد وهي الفئة التي تحوي على ترتيب الوسيط، وذلك بأن نبحث في عمود التكرار الصاعد عن القيمة $\frac{n}{2}$ ونضع خطاً أفقياً بين التكرارين اللذين تقع بينهما القيمة $\frac{n}{2}$.

4- نحدد التكرار المتجمع الصاعد للفئة السابقة للفئة الوسيطية $f_{i-1}\uparrow$.

5- نحدد التكرار المطلق أو التكرار الأساسي للفئة الوسيطية.

6- نوجد الوسيط من العلاقة:

$$Median = A + \left(\frac{\frac{n}{2} - f_{i-1}\uparrow}{f_i}\right) \times l \qquad (4)$$

حيث: A : هي الحد الأدنى للفئة الوسيطية.

$f_{i-1}\uparrow$: التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الوسيطية.

f_i : التكرار المطلق أو التكرار الأساسي للفئة الوسيطية.

l : طول الفئة.

مثال (29): أوجد الوسيط للبيانات الواردة في المثال (16) .

الحل:

نوجد جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد بالشكل التالي:

حدود الفئات	التكرار	التكرار الصاعد $f_i\uparrow$
$[60 - 100[$	3	3
$[100 - 140[$	7	10
$[140 - 180[$	9	$f_{i-1}\uparrow$ 19
$[180 - 220[$	f_i 15	34
$[220 - 260[$	8	42
$[260 - 300[$	6	48
$[300 - 340[$	2	50
المجموع	50	—

ثُمَّ نعوض في القانون التالي فنجد:

$$Median = A + \left(\frac{\frac{n}{2} - f_{i-1}\uparrow}{f_i}\right) \times l$$
$$= 180 + \left(\frac{25-19}{15}\right) \times 40$$

$$= 180 + \frac{240}{15} = 180 + 16 = 196$$

ملاحظة (4): يمكننا حساب الوسيط للبيانات المبوبة من جدول التوزيع التكراري المتجمع الهابط.

ملاحظة (5): يمكن إيجاد الوسيط بيانياً من المنحني المتجمع الصاعد والمنحني المتجمع الهابط أو من تقاطع المنحنيين في رسم واحد.

ففي حالة المنحني المتجمع الصاعد تحدد نقطة $\frac{n}{2}$ على المحور الشاقولي ونرسم منها خطاً أفقياً موازياً للمحور الأفقي وهو محور الفئات إلى أن يلتقي بالمنحني في نقطة. نسـقط من تلك النقطة عموداً يلاقي المحور الأفقي في نقطة تكون قيمتها هي قيمة الوسيط بيانياً.

وفي حالة المنحني المتجمع الهابط نتبع الخطوات السـابقة نفسـها التي اتبعناها في حالة المنحني المتجمع الصـاعد بيانياً.

أما في حالة تقاطع المنحنيين الصـاعد والهابط في نقطة، نسـقط من هذه النقطة عموداً على المحور الأفقي فتكون نقطة تقاطعه هي قيمة الوسيط المطلوب.

4 –محاسن الوسيط ومساوئه:

آ – محاسن الوسيط:

1- تعريفه واضح وسهل ولا يتأثر بالقيم المتطرفة أو الشاذة.

2- لا تتغير قيمة الوسيط إذا غيرنا جميع القيم التي قبله أو بعده.

3- يمكن إيجاد الوسيط للبيانات الوصفية التي لها صفة الترتيب.

ب – مساوئ الوسيط:

1- لا يأخذ جميع القيم في الحسبان.

2- عدم اتصافه بميزات جبرية وإن استعماله محدود في الأساليب الإحصائية.

3- لا يصلح لقياس النزعة المركزية عندما يكون عدد البيانات صغيراً ومن ثُمَّ فإن الوسيط المحسوب هو قيمة غير ثابتة تختلف اختلافاً كبيراً عند إضافة بيانات جديدة إلى القيمة.

ثالثاً –المنوال: يعرَف المنوال لمجموعة من البيانات بأنه القيمة الأكثر تكراراً وقد يكون المنوال موجوداً أو لا، وإن وجد فهو ليس وحيداً، أي قد يكون لمجموعة من البيانات أكثر من منوال.

1 – المنوال للبيانات غير المبوبة:

لإيجاد المنوال، نوجد القيمة الأكثر تكراراً مباشرة من تلك البيانات، دون ترتيب هذه البيانات.

مثال (30): أوجد المنوال للبيانات الآتية التي تدل على أطوال عشرة أشخاص:

175 ، 180 ، 175 ، 172 ، 175 ، 180 ، 181 ، 170 ، 168 ، 165 .

الحل: نلاحظ أن الطول 175 هو أكبر تكرار، ومن ثُمَّ فإن المنوال في هذه الحالة هو 175 سم.

2 – المنوال للبيانات المبوبة:

لإيجاد المنوال للبيانات المبوبة نتبع الخطوات الآتية:

1– نحدد الفئة المنوالية وهي الفئة التي يقابلها أكبر تكرار، ونرمز لتكرارها بالرمز f.

2– نوجد الحد الأدنى للفئة المنوالية ونرمز له بالرمز A.

3– نوجد التكرار السابق واللاحق للفئة المنوالية f_2 ، f_1 على الترتيب، ثُمَّ نوجد طول الفئة المنوالية وهو طول الفئة المحسوب سابقاً l .

4– نوجد المنوال من العلاقة:

$$Mod = A + \left(\frac{f-f_1}{2f-f_1-f_2}\right) \times l \qquad (5)$$

حيث: A : هي الحد الأدنى للفئة المنوالية.

f : تكرار الفئة المنوالية.

f_1 : التكرار السابق للفئة المنوالية.

f_2 : التكرار اللاحق للفئة المنوالية.

l : طول الفئة.

مثال (31): أوجد المنوال لمجموعة البيانات الواردة في المثال (16) من الفصل الحالي.

الحل: نوجد جدول التوزيع التكراي لفئات القيم كما في الشكل:

التكرار	حدود الفئات
3	$[60-100[$
7	$[100-140[$
f_1 9	$[140-180[$
f 15	$[180-220[$
f_2 8	$[220-260[$
6	$[260-300[$
2	$[300-340[$
50	المجموع

نلاحظ من جدول التوزيع التكراري أن الفئة المنوالية هي الفئة الرابعة وأن تكرارها $f = 15$ ، كما وأن التكرار السابق هو $f_1 = 9$ والتكرار اللاحق هو $f_2 = 8$ وطول الفئة هو $l = 40$ وأخيراً فإن الحد الأدنى للفئة المنوالية هو $A = 180$ ، ثُمَّ نوجد المنوال من العلاقة:

$$Mod = A + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times l$$

$$= 180 + \left(\frac{15-9}{30-9-8}\right) \times 40$$

$$= 180 + \frac{240}{13} = 180 + 18.46 = 196.46$$

ملاحظة (6): يمكن إيجاد المنوال بيانياً وذلك برسم ثلاث مستطيلات من المدرج التكراري فقط وهي المستطيل الممثل لأكبر تكرار ثُمَّ المستطيل السابق والمستطيل اللاحق. نصل الزاوية العليا اليمنى للمستطيل السابق بالزاوية العليا اليمنى للمستطيل الممثل لأكبر تكرار ثُمَّ نصل الزاوية العليا اليسرى للمستطيل اللاحق بالزاوية العليا اليسرى للمستطيل الممثل لأكبر تكرار، وأخيراً ننزل عمود من نقطة تقاطعهما على المحور الأفقي فتكون نقطة التقاطع هي قيمة المنوال.

3 – محاسن المنوال ومساوئه:

آ: **محاسن المنوال:**

1- لا يتأثر بالقيم المتطرفة أو الشاذة.

2- سهولة فهمه وتعينه بحيث لا يتطلب أكثر من تعريفه لجعل معناه واضحاً.

3- يمكن إيجاده من بيانات وصفية وكذلك من توزيعات تكرارية مفتوحة.

ب: مساوئ المنوال:

1- لا يأخذ جميع القيم في الحسبان.

2- قد يكون المنوال غير موجودٍ.

3- قد يكون لمجموعة من البيانات أكثر من منوال، وبذلك يكون المنوال متعدد القيم، ومن ثُمَّ يصعب التعامل معه في التحليل الإحصائي.

4 –العلاقة بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال:

نلاحظ أنه في حالة التوزيعات التكرارية المتماثلة وحيدة المنوال نجد أن المقاييس الثلاثة تكون متطابقة، أي أن قيم الوسط الحسابي والوسيط والمنوال تكون متساوية. ولكن في حالة عدم التماثل، أي عند وجود التواء نحو اليمين أو نحو اليسار فإن قيم هذه المقاييس تختلف عن بعضها البعض، ويكون الوسط الحسابي أكبر المقاييس السابقة في حالة الالتواء نحو اليمين، يليه الوسيط، ثُمَّ المنوال وهو أصغر المقاييس الثلاثة في هذه الحالة. وإذا كان الالتواء نحو اليسار فإننا نجد أن الوسط الحسابي يكون أصغر المقاييس السابقة ويليه الوسيط ثُمَّ المنوال وهو أكبر المقاييس الثلاثة في هذه الحالة.

أما في حالة الالتواء البسيط نحو اليمين أو اليسار فإن هناك علاقة تجريبية بين هذه المقاييس:

$$\left(\text{الوسط الحسابي} - \text{المنوال}\right) = 3\left(\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط}\right)$$

وتصبح هذه العلاقة غير صحيحة في حالة الالتواء الحاد.

وهذه العلاقة تعطينا طريقة أخرى تقريبية لحساب المنوال لا تقل دقة عن الطرائق السابقة، كما تساعدنا على حساب الوسط الحسابي في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة.

رابعاً – الوسط الهندسي: لاحظنا سابقاً أن الوسط الحسابي يتأثر بالقيم الشاذة، أي القيم الصغيرة جداً، أو القيم الكبيرة جداً مقارنة ببقية البيانات، لذلك دعت الحاجة إلى إيجاد مقاييس عددية تكون أقل تأثيراً بالقيم الشاذة وخاصة القيم الكبيرة جداً مقارنة ببقية البيانات، ومن هذه المقاييس الوسط الهندسي الذي يعطي قيماً أدق من الوسط الحسابي في دراسة بعض الظواهر الطبيعية أو الاقتصادية التي تزيد مفرداتها بمعدلات ثابتة مثل ظاهرتي النمو السكاني والاقتصادي وغيرها.

ويمتاز الوسط الهندسي عن الوسط الحسابي بأنه أقل تأثيراً بالقيم المتطرفة في البيانات، وأن الوسط الهندسي لمجموعة من البيانات دوماً أقل من وسطها الحسابي.

1 –الوسط الهندسي لبيانات غير مبوبة:

يعرَّف الوسط الهندسي لقيمتين x_1،x_2 بأنه الجذر التربيعي الموجب لحاصل جدائهما، فإذا رمزنا للوسط الهندسي بالرمز G الوسط الهندسي للقيمتين x_1،x_2 يعطى بالعلاقة:

$$G = \sqrt[2]{x_1 . x_2}$$

وكذلك فإن الوسط الهندسي لثلاثة قيم x_1،x_2،x_3 يعطى بالعلاقة:

$$G = \sqrt[3]{x_1 . x_2 . x_3}$$

وبشكل عام إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات $x_1, x_2, \dots, x_n$ مأخوذة من مجتمع إحصائي ما، فإن الوسط الهندسي G لهذه البيانات يعطى بالعلاقة:

$$G = \sqrt[n]{x_1 . x_2 \dots x_n}$$

أي أن الوسط الهندسي لهذه البيانات والتي عددها n هو الجذر النوني لحاصل جدائهما، وإذا أخذنا اللوغاريتم العشري للطرفين في العلاقة الأخيرة فإننا نجد:

$$LogG = \frac{1}{n} Log(x_1 . x_2 \dots x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Logx_i \qquad (6)$$

2 –الوسط الهندسي لبيانات مبوبة:

يعطى الوسط الهندسي في حالة البيانات المبوبة بالعلاقة الآتية:

$$LogG = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} f_i Logx_i'$$

حيث f_1،f_2، ... ،f_r تكرارات لفئات عددها r ومراكزها x'_1،x'_2، ... ،x'_r على الترتيب.

ولإيجاد الوسط الهندسي من بيانات مبوبة نتبع الخطوات الآتية:

1- نحسب اللوغاريتم العشري لمراكز الفئات.

2- نضرب لوغاريتم مركز الفئة بتكرار تلك الفئة ثُمَّ نحسب المجموع.

3- نقسم مجموع جداء لوغاريتم مركز الفئة بتكرار تلك الفئة على مجموع التكرارات، فنحصل على لوغاريتم الوسط الهندسي.

4- نبحث عن مقابل لوغاريتم G فنحصل على قيمة الوسط الهندسي.

مثال (32): أوجد الوسط الهندسي للبيانات التالية: 12 ، 10 ، 7 ، 6 ، 6 ، 5 ، 3 .

الحل:

نلاحظ أن هذه البيانات غير مبوبة ومن ثُمَّ فإن الوسط الهندسي يعطى بالعلاقة:

$$LogG = \frac{1}{7}(Log3 + Log5 + 2Log6 + Log7 + Log10 + Log12)$$
$$= \frac{1}{7}(0.477 + 0.699 + 1.556 + 0.845 + 1 + 1.079) = 0.808$$

ومن جدول اللوغاريتم نجد أن الوسط الهندسي هو: $G = 6.43$.

- وبحساب الوسط الحسابي نجد:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{3+5+6+6+7+10+12}{7} = \frac{49}{7} = 7$$

نلاحظ أن الوسط الهندسي أصغر من الوسط الحسابي وهذا يوضح حقيقة أن الوسط الهندسي لمجموعة أرقام موجبة غير متساوية, أصغر من وسطها الحسابي.

مثال (33): أوجد الوسط الهندسي للبيانات المبوبة في الجدول الآتي:

الفئات	f_i	x'_i	$Logx'_i$	$f_iLogx'_i$
$[8-12[$	10	10	1	10
$[12-16[$	25	14	1.146	28.65
$[16-20[$	50	18	1.255	62.75
$[20-24[$	10	22	1.342	13.42
$[24-28[$	5	26	1.414	7.07
المجموع	100			121.89

نلاحظ أن هذه البيانات مبوبة ومن ثُمَّ فإن الوسط الهندسي يعطى من العلاقة:

$$LogG = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} f_i Log x_i'$$
$$= \frac{1}{100}(121.89) = 1.2189$$

ومن جدول اللوغاريتم نجد قيمة الوسط الهندسي G فنجد:

$$G = 16.56 \quad \text{وحدة}$$

3 –محاسن الوسط الهندسي ومساوئه:

آ –**محاسن الوسط الهندسي:**

1– يُعدُّ المتوسط الوحيد الذي يعطي نتائج سليمة رياضياً عند حساب متوسط المعدلات الزمنية.

2– هو متوسط محدد رياضياً بدقة، حيث يتصف بميزات جبرية معينة.

3– من فوائده الهامة قياس متوسط نسب التغير كما هو الحال في تغيرات النمو.

ب –**مساوئ الوسط الهندسي:**

1– صعوبة فهمه وعدم إمكانية تحديده في القيم السالبة.

2– يعتبر من أكثر المتوسطات تعقيداً لأنه يعتمد في حسابه على الآلات الحاسبة.

خامساً – الوسط التوافقي: يُعدُّ الوسط التوافقي من المقاييس التي تحد من تأثير القيم الشاذة وخاصة في حالة القيم الكبيرة مقارنة ببقية البيانات. ويلاحظ أن تأثير الوسط التوافقي أكبر من تأثير الوسط الهندسي في الحد من القيم الشاذة نحو الكبر. لأن قيمته تكون أصغر من قيمة الوسط الهندسي لنفس مجموعة البيانات.

1–الوسط التوافقي لبيانات غير مبوبة:

إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات x_1، x_2، ... x_n مأخوذة من مجتمع إحصائي ما، فإن الوسط التوافقي والذي نرمز له بالرمز H يعطى بالعلاقة الآتية:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right) \qquad (7)$$

أو بالعلاقة:

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)} = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

2–الوسط التوافقي لبيانات مبوبة:

يعرَف الوسط التوافقي في حالة البيانات المبوبة بالعلاقة الآتية:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{f_1+f_2+\cdots+f_r}\left(\frac{f_1}{x_1'}+\frac{f_2}{x_2'}+\cdots+\frac{f_r}{x_r'}\right) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} f_i}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{f_i}{x_i'}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{f_i}{x_i'}\right)$$

حيث $f_1، f_2، \dots، f_r$ تكرارات لفئات عددها r ومراكزها $x'_1، x'_2، \dots، x'_r$ على الترتيب.

أو بالعلاقة:

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{f_1}{x'_1}+\frac{f_2}{x'_2}+\cdots+\frac{f_r}{x'_r}}{f_1+f_2+\cdots+f_r}} = \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i}{\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{f_i}{x'_i}\right)}$$

مثـــــال (34): لنفترض أن طبيب الأسنان يستطيع أن يكشف عن 6 أسنان في الساعة وأن يقلع 4 أسنان في الساعة وأن يداوي 3 أسنان في الساعة. فما هو متوسط عدد الأسنان التي يمكن معالجتها في الساعة.

الحل: طريقة أولى:

الزمن اللازم للكشف عن السن $= \frac{1}{6}$ الساعة $= 10$ دقائق

الزمن اللازم لقلع السن $= \frac{1}{4}$ الساعة $= 15$ دقيقة

الزمن اللازم لمداواة السن $= \frac{1}{3}$ الساعة $= 20$ دقيقة

وبالتالي فإن متوسط الزمن اللازم لمعالجة أي سن هو:

$$\frac{10+15+20}{3} = \frac{45}{3} = 15 \quad \text{دقيقة}$$

ومتوسط عدد الأسنان الممكن معالجتها بالساعة هو: أسنان $\frac{60}{15} = 4$

طريقة ثانية: باستخدام علاقة الوسط التوافقي التالية نجد:

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)} = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}} = \frac{3}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = \frac{3\times 24}{18} = 4 \quad \text{أسنان}$$

وهو عبارة عن متوسط عدد الأسنان التي يمكن مداواتها في الساعة.

مثال (35): احسب الوسط التوافقي H للبيانات المعرفة في المثال (32) السابق.

الحل:

نلاحظ أن هذه البيانات غير مبوبة ومن ثُمَّ فإن الوسط التوافقي يعطى من العلاقة:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{f_i}{x_i}\right)$$

$$= \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right) = \frac{501}{2940} = 5.87$$

- لقد وجدنا سابقاً أن الوسط الحسابي لهذه البيانات هو $\overline{x} = 7$ وأن الوسط الهندسي هو $G = 6.43$. بالمقارنة نجد أن الوسط التوافقي للبيانات نفسها $H = 5.87$ وهو أصغر المتوسطات الثلاثة.

مثال (36): قامت إحدى المستشفيات بشراء 800 علبة شاش من ثلاث مخازن مختلفة كما يلي:

الكمية f	عدد العلب المشتراة بعشر ليرات x	رقم المخزن
110	10	1
240	12	2
450	15	3

والمطلوب أحسب الوسط التوافقي لعدد العلب الشاش الممكن شراؤها بعشر ليرات سورية.

الحل: إن الوسط التوافقي يعطى بالشكل:

$$H=\frac{1}{\frac{\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+\cdots+\frac{f_r}{x_r}}{f_1+f_2+\cdots+f_r}}=\frac{\sum_{i=1}^{r} f_i}{\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{f_i}{x_i}\right)}=\frac{1}{\frac{\left(\frac{110}{10}\right)+\left(\frac{240}{12}\right)+\left(\frac{450}{15}\right)}{110+240+450}}=\frac{800}{11+20+30}=13.115 \quad \text{ل.س}$$

أي أن متوسط عدد العلب الممكن شراؤها بعش ليرات سورية هو 13 علبة تقريباً.

3 – محاسن الوسط التوافقي ومساوئه:

آ – محاسن الوسط التوافقي:

1– يأخذ جميع القيم بالحسبان. وهو أصغر من الوسط الهندسي.

2– يعد الوسط التوافقي أفضل المتوسطات في حالة إيجاد معدلات النسب ومعدلات الإنتاج.

3 – الوسط التوافقي أقل تأثيراً بالقيم الشاذة الكبيرة من الوسط الحسابي.

ب – مساوئ الوسط التوافقي:

1– يصعب حسابه في البيانات الوصفية والبيانات الكمية ذات التوزيعات التكرارية المفتوحة.

2– لا يساوي في الغالب أياً من القيم الداخلة في حسابه.

ملاحظة: عندما نريد أن نعطي فكرة واضحة ودقيقة عن ظاهرة ما، فإننا نسعى إلى حساب عدة أنواع من المتوسطات، لأنه في الحقيقة لكل نوع من المتوسطات استعمالاته وفوائده وذلك حسب الحاجة والهدف، والاكتفاء بنوع واحد من المتوسطات ربما لا يكون كافياً لوصف التوزيع التكراري الذي يمثل الظاهرة المدروسة بشكل دقيق، لذا نلجأ إلى حساب مقاييس أخرى.

1-7–مقاييس التشتت (Measures of dispersion):

لقد تحدثنا عن طرائق تلخيص وتنظيم البيانات الإحصـائية وعرضـها بصـورها المختلفة الجدولية والبيانية ثُمَّ تناولنا بعد ذلك طريقة حسـاب مقاييس النزعة المركزية وذلك من أجل إيجاد قيم عددية محددة تصـف هذه البيانات بأشكالها المختلفة ولكن هذه المقاييس تكون غير كافية من أجل توضـيح مقدار التفاوت بين مفردات المشـاهدة للظاهرة المدروسـة كما في المثال الآتي:

مثال (37): في دراسة عن الأضرار التي لحقت بالمشافي العامة وذلك بسبب أعطال الأجهزة الطبية نتيجة انقطاع التيار الكهربائي المتكرر ونتيجة ضعف التيار الكهربائي، وقد تم الحصول على البيانات التالية من 25 مشفى في القطر العربي السوري التي تدل على الأعطال:

عدد الأعطال نتيجة انقطاع التيار الكهربائي				
1	7	7	6	1
2	2	1	7	2
1	3	2	7	5
6	1	7	4	1
5	7	6	3	6

وكذلك وجدنا:

عدد الأعطال نتيجة ضعف التيار الكهربائي				
1	2	4	4	7
3	3	2	4	5
2	4	3	5	3
4	4	3	6	5
5	6	4	6	5

لنوجد جدول التوزيع التكراري (التكرار النسبي) لهاتين المجموعتين من البيانات بالشكل التالي:

عدد الأعطال	التكرار	التكرار النسبي
1	6	0.24
2	4	0.16
3	2	0.08
4	1	0.04
5	2	0.08
6	4	0.16
7	6	0.24

يمثل هذا الجدول أعطال الأجهزة الطبية نتيجة انقطاع التيار الكهربائي، ويمثل الجدول التالي أعطال الأجهزة الطبية نتيجة ضعف التيار الكهربائي.

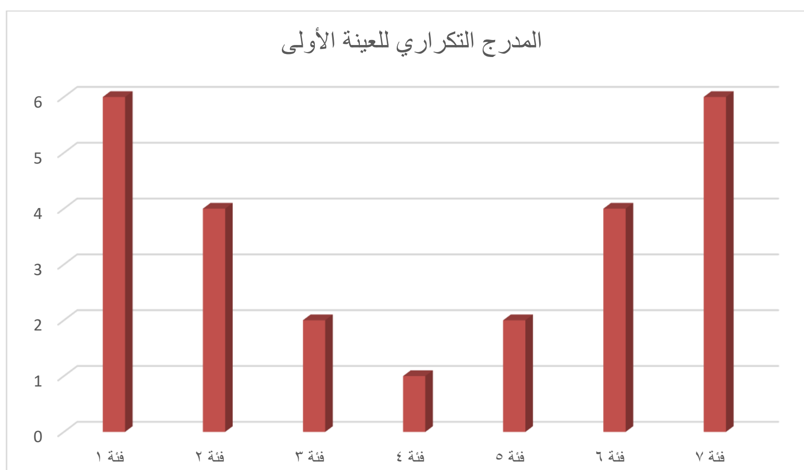
عدد الأعطال	التكرار	التكرار النسبي
1	1	0.04
2	3	0.12
3	5	0.20
4	7	0.28
5	5	0.20
6	3	0.12
7	1	0.04

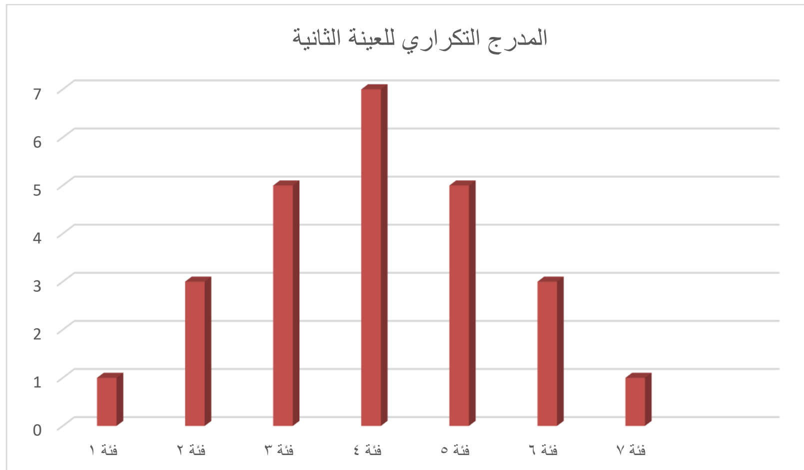
لنوجد الآن الوسط الحسابي لهاتين العينتين. نرمز للوسط الحسابي للعينة الأولى بالرمز $\overline{x}$ وللوسط الحسابي للعينة الثانية بالرمز $\overline{y}$ ونكتب:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1+7+7+\cdots+3+6}{25} = 4 \quad \text{أعطال}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1+2+4+\cdots+6+5}{25} = 4 \quad \text{أعطال}$$

لنوجد الآن المدرج التكراري لكل من الجدولين السابقين:





نلاحظ من هذا المثال أنه على الرغم من اختلاف عدد الأعطال الناتجة بسبب انقطاع وضعف التيار الكهربائي في هذه المشافي، إلا أن متوسط الأعطال هو نفسه. كما ونلاحظ أيضاً أن المدرجين التكراريين لهاتين العينتين مختلفان تماماً. أي أن لهاتين العينتين توزيعين مختلفين تماماً على الرغم من أن لهما الوسط الحسابي نفسه.

نستنتج من هذا كله أنه على الرغم من ميل البيانات الإحصائية لعينة ما للتجمع حول وسطها الحسابي، نجد في الوقت نفسه تقترب وتبتعد عن هذه القيمة بمقادير مختلفة، وبالتالي فإننا نلاحظ أن مثل هذه الخواص لمقاييس النزعة المركزية يجعلها غير كافية لوصف البيانات من حيث تباعد وتبعثر البيانات الإحصائية للمجموعة الواحدة بعضها عن بعض. لهذا السبب دعت الحاجة إلى إيجاد مقاييس عددية أخرى لقياس مقدار هذا التفاوت أو هذا التباعد بين البيانات. وتسمى مثل هذه المقاييس مقاييس التشتت، وسوف نقدم في هذه الفقرة كيفية حساب بعض أهم خصائص مقاييس التشتت، وبالتحديد مقاييس المدى ونصف المدى الربيعي، والتباين والانحراف المعياري، ومعاملي الاختلاف والالتواء. وسنتناول أيضاً بعض المقاييس الأخرى ذات العلاقة بمقاييس التشتت مثل مقاييس الالتواء، ومقاييس التفلطح في آخر هذا الفصل.

أولاً –المدى:

1–المدى في حالة البيانات غير المبوبة: وهو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة. ونكتب:

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

مثال (38): أوجد المدى لعدد المخالفات الانضباطية لعينة من الجنود مكونة من عشرة جنود في كتيبة ما خلا ل عام وكانت: 65، 55، 77، 89، 90، 99، 80، 60، 88، 70.

نلاحظ أن أكبر عدد من المخالفات هو55 مخالفة وأن أصـغر عدد من المخالفات هو 99 مخالفة. فيكون المدى هو الفرق بينهما ويساوي 44 مخالفة.

2-المدى في حالة البيانات المبوبة: فيوجد أكثر من تعريف نذكر منها التعريفين الآتيين:

التعريف الأول: المدى هو عبارة عن الفرق بين مركز الفئة العليا ومركز الفئة الدنيا. أي أن:

المدى = مركز الفئة العليا − مركز الفئة الدنيا

التعريف الثاني: المدى هو عبارة عن الفرق بين الحد الأدنى للفئة الدنيا والأعلى للفئة العليا أي:

المدى= الحد الأعلى للفئة العليا− الحد الأدنى للفئة الدنيا

مثال (39): أوجد المدى للبيانات المبينة بالجدول الآتي:

حدود الفئات	[10 − 20[	[20 − 30[	[30 − 40[	[40 − 50[	[50 − 60[	[60 − 70[
التكرار	2	4	6	10	6	4

الحل:

نلاحظ من الجدول السابق أن مركز الفئة الدنيا يساوي 15 ومركز الفئة العليا يساوي 65.

الحد الأعلى للفئة العليا يساوي 69 والحد الأدنى للفئة الدنيا يساوي 10.

المدى باستخدام التعريف الأول يساوي 50 والمدى باستخدام التعريف الثاني يساوي 59.

3-محاسن المدى ومساوئه:

آ-**محاسن المدى:**

1- يعطي فكرة سريعة عن طبيعة البيانات الإحصائية.

2- سهولة حسابه كما ويستفاد منه في مراقبة جودة الإنتاج والأحوال الجوية.

ب-مساوئ المدى:

1- إن المدى مقياس تقريبي لا يُعتمد عليه، لأنه يعتمد في حسابه فقط على المفردتين الشاذتين.

2-يصعب حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة وفي حالة البيانات الوصفية.

ثانياً-نصف المدى الربيعي: نلاحظ مما سبق أن من أهم خصائص المدى غير المرغوب فيها تأثره بالقيم الشاذة الصغرى أو الكبرى.

لذلك دعت الحاجة إلى إيجاد مقاييس أخرى تستبعد هذه القيم الشاذة من الطرفين، ومن أهم هذه المقاييس هو نصف المدى الربيعي، والذي يمكن حسابه بعد ترتيب البيانات تصاعديا، وتقسيمها إلى أربعة أقسام يستبعد منها ربع المفردات الصغرى من ناحية، وكذلك ربع المفردات الكبرى من الناحية الأخرى.

بعد ذلك نسـمي القيمة التي تكون دونها ربع المفردات بالربيع الأدنى ونرمز له بالرمز r_1 أما القيمة التي تحدد ثلاثة أرباع المفردات فتسمى بالربيع الأعلى، ونرمز له بالرمز r_3 والفرق بينهما هو عبارة عن المدى الربيعي. أما نصف المدى الربيعي، ونرمز له بالرمز r يعطى بالشكل:

$$r = \frac{r_3 - r_1}{2}$$

ويُعدُّ نصف المدى الربيعي مقياسا يستبعد القيم المتطرفة من الطرفين الأعلى والأدنى. وتسمى القراءة التي تكون دونها نصف البيانات بالربيع الثاني، ونرمز له بالرمز r_2.

1 – نصف المدى الربيعي في حالة البيانات غير المبوبة:

إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات x_1،x_2، ... x_n، مأخوذة من مجتمع إحصائي ما، وسطها الحسابي $\overline{x}$ ، فإنه لإيجاد نصف المدى الربيعي لها نتبع الخطوات الآتية:

1– نرتب البيانات، وليكن عددها n ترتيبا تصاعديا مثلاً.

2– نوجد رتبة الربيع الأدنى r_1 وهي القراءة التي رتبتها $\frac{n}{4}$ في حالة كون n تقبل القسمة على 4، أما إذا كانت n لا تقبل القسمة على 4 فتكون قيمة الربيع الأدنى r_1 عبارة عن متوسط القراءتين اللتين يقع بينهما العدد الكسري $\frac{n}{4}$.

3– نحسب الربيع الأعلى r_3 وهي القراءة التي رتبتها $\frac{3n}{4}$ في حالة كون n تقبل القسمة على 4، أما إذا كانت n لا تقبل القسمة على 4 فتكون قيمة الربيع الأدنى r_1 عبارة عن متوسط القراءتين اللتين يقع بينهما العدد الكسري $\frac{3n}{4}$

.

4– نحسب نصف المدى الربيعي r بتطبيق العلاقة السابقة ونوضح ذلك بالمثال الآتي:

مثال (40): أوجد نصف المدى الربيعي لأعمار عينة مكونة من 8 موظفين في كلية العلوم أعمارهم كانت كما يأتي: 50،30،22،21،15،44،39،35.

الحل:

نرتب البيانات تصاعديا كالآتي: 15،21،22،30،35،39،44،50

رتبة الربيع الأدنى هي:

$$\text{رتبة } r_1 = \frac{n}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad ، \; n = 8$$

أي أن الربيع الأدنى هو القراءة الثانية من جهة اليمين وهو: سنة $r_1 = 21$

أما رتبة الربيع الأعلى هي:

$$r_3 \text{ رتبة} = \frac{3n}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

أي أن الربيع الأعلى هو الحد السادس من جهة اليمين، وهو: سنة $r_3 = 39$.

أما نصف المدى الربيعي فيكون:

$$r = \frac{r_3 - r_1}{2} = \frac{39-21}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad \text{سنوات}$$

مثال (41): أوجد نصف المدى الربيعي لأعمار مفردات العينة المكونة من 10 موظفين في جامعة دمشق حيث إن البيانات كانت كالآتي: $18, 33, 23, 27, 50, 23, 36, 38, 45, 30$

الحل: نرتب البيانات تصاعدياً فتكون:

$$18, 23, 23, 27, 30, 33, 36, 38, 45, 50$$

رتبة الربيع الأدنى هي:

$$r_1 \text{ رتبة} = \frac{n}{4} = \frac{10}{4} = 2.5 \quad ، \; n = 10$$

وبذلك تكون قيمة الربيع الأدنى:

$$r_1 = \frac{23+23}{2} = \frac{46}{2} = 23 \quad \text{سنة}$$

أما رتبة الربيع الأعلى هي:

$$r_3 \text{ رتبة} = \frac{3n}{4} = \frac{30}{4} = 7.5 \quad \text{سنة}$$

أي قيمة الربيع الأعلى هي عبارة عن متوسط الحدين السابع والثامن، وتحسب بالشكل الآتي:

$$r_3 = \frac{36+38}{2} = 37 \quad \text{سنة}$$

وعليه فإن قيمة نصف المدى الربيعي r هي:

$$r = \frac{r_3 - r_1}{2} = \frac{37-23}{2} = \frac{14}{2} = 7 \quad \text{سنوات}$$

2 – نصف المدى الربيعي في حالة البيانات المبوبة:

يتم حساب نصف المدى الربيعي

طنن

3 – محاسن نصف المدى الربيعي ومساوئه:

آ–محاسن نصف المدى الربيعي:

1– لا يتأثر بالقيم الشاذة.

2– يمكن حسابه في حالة البيانات الوصفية التي لها صفة الترتيب وفي حالة الجداول التكرارية المفتوحة.

ب –مساوئ نصف المدى الربيعي:

1–لا يأخذ جميع البيانات في الحسبان.

2–يصعب التعامل معه في التحليل الإحصائي.

ثالثاً–المئينات: وجدنا سابقاً أن الوسيط يقسم البيانات إلى جزأين متساويين، وأن المقياس التربيعي يقسم البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية وذلك بعد ترتيب البيانات ترتيباً تنازلياً أو تصاعدياً. حيث يدعى الجزء الأول والذي يحوي ربع البيانات بالربيع الأول ونرمز له بالرمز r_1 وأما الربيع الثاني فهو الجزء الذي يحتوي على نصف البيانات ونرمز له بالرمز r_2 ، والربيع الثالث فهو الجزء الذي يحوي على ثلاثة أرباع البيانات ونرمز له بالرمز r_3 أما الربيع الرابع فهو الجزء الذي يحتوي على جميع البيانات ونلاحظ أن الربيع الثاني يقابل الوسيط.

وإذا قسمنا البيانات إلى مائة جزء متساوٍ، فإننا نسمي كل جزء بالمئين ونقول مثلاً المئين العاشر هو الجزء الذي يحتوي على عشر البيانات. وهكذا ونرمز للمئين العاشر بالرمز P_{10} ، وللمئين التسعين بالرمز P_{90} ، وهكذا......

رابعاً–التباين والانحراف المعياري: يُعدُّ التباين والانحراف المعياري من أهم مقاييس التشـــتت المســـتخدمة في أغلب المسائل الإحصائية.

تعريف: إذا كانت لدينا مجموعة من البياناتx_n، ... ،x_2،x_1 مأخوذة من مجتمع إحصائي ما، وسطها الحسابي $\overline{x}$ ، عندئذٍ يعرَّف التباين بالعلاقة:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

أي أن التباين لمجموعة n من البيانات هو عبارة عن متوسط مجموع مربعات انحراف تلك البيانات عن وسطها الحسابي.

نرمز للتباين بالرمز S^2 وتتلخص فكرة حسابه في حساب الانحرافات عن أحد مقاييس النزعة المركزية، ويستخدم الوسط الحسابي فقط لهذا الغرض، كما وأن مكانته بين مقاييس التشتت كمكان الوسط الحسابي بين مقاييس النزعة المركزية.

ويســـمى الجذر التربيعي الموجب للتباين بالانحراف المعياري ونرمز له بالرمز S . حيث يُعدّ الانحراف المعياري من أهم وأدق وأفضل مقاييس التشتت على الإطلاق.

كما وأنه يمكننا تعريف التباين في حالة كون المشاهدات عبارة عن عينة عشوائية من العلاقة الآتية:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \qquad (9)$$

وبحساب الجذر التربيعي الموجب للتباين نحصل على الانحراف المعياري أي أن:

$$S = \sqrt{S^2} \qquad (10)$$

والجذر التربيعي يعطينا قياساً بنفس وحدات المتغير x .

سوف نتناول طريقة حساب التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة وغير المبوبة:

1-التباين والانحراف المعياري للبيانات غير المبوبة:

إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات $x_1، x_2، ...، x_n$ مأخوذة من مجتمع إحصائي ما، وسطها الحسابي $\overline{x}$ ، فإن التباين يعطى بالعلاقة (9) والانحراف المعياري يعطى بالعلاقة (10)، وسوف نوضح طريقة الحساب في المثال الآتي:

مثال (42): أوجد التباين والانحراف المعياري لأعمار عينة من الموظفين في كلية العلوم بياناتها كالآتي: 15 ، 21 ، 22 ، 30 ، 35 ، 39 ، 44 ، 50 .

الحل:

لقد وجدنا الوسط الحسابي لهذه البيانات فكان مساوياً 32, لنُكوِّن الآن الجدول الآتي:

x_i	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$
15	-17	189
21	-11	121
22	-10	100
30	-2	4
35	3	9
39	7	49
44	12	144
50	18	324
$\sum_{i=1}^{n} x_i = 256$	$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$	$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 1040$

لنحسب الآن التباين من العلاقة السابقة فنجد:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{7}(1040) = 148.57 \quad \text{سنة}$$

والانحراف المعياري هو:

$$S = \sqrt{148.57} = 12.19 \quad \text{سنة}$$

نلاحظ عند حساب التباين باستخدام العلاقة (9) السابقة أنه لابد من حساب الوسط الحسابي $\overline{x}$ وطرحه من جميع القيم. وقد يكون الوسط الحسابي عدداً كسرياً مما يزيد من صعوبة الحسابات مما دعت الحاجة إلى إيجاد صيغ أخرى تكون أبسط في الحساب وذلك كما يأتي:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\overline{x})^2\right) \qquad (11)$$

2–التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة:

يعرَّف التباين لمجموعة من البياناتx_n، ... ،x_1،x_2 ، وسطها الحسابي $\overline{x}$ بالعلاقة التالية:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{r} f_i(x_i' - \overline{x})^2 \qquad (12)$$

حيث f_1،f_2، ... ،f_r تكرارات لفئات عددها r ومراكزها x_1'،x_2'، ... ،x_r' على الترتيب.

مثال (43): حل المثال رقم (41) السابق باستخدام العلاقة (11).

الحل:

نُكوِّن جدولاً مؤلفاً من عمودين فقط كما يأتي، ثُمَّ نجد التباين من العلاقة (11):

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{7}\left(9232 - \frac{65536}{8}\right) = 148.57 \text{ سنة}$$

x_i	x_i^2
15	225
21	441
22	484
30	900
35	1225
39	1521
44	1936
50	2500
$\sum_{i=1}^{n} x_i = 256$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 9232$

ومنه نجد الانحراف المعياري:

$$S = \sqrt{148.57} = 12.19 \qquad \text{سنة}$$

مثال (44): احسب التباين والانحراف المعياري لبيانات المثال (16).

الحل: لدينا الوسط الحسابي $\overline{x} = 195$ ولتسهل الحسابات نُكوِّن جدول الحل كما يأتي:

حدود الفئات	التكرار f	مراكز الفئات x'	$x'-\overline{x}$	$(x'-\overline{x})^2$	$f(x'-\overline{x})^2$
$[60-100[$	3	80	-115	13225	39675
$[100-140[$	7	120	-75	5625	39375
$[140-180[$	9	160	-35	1225	11025
$[180-220[$	15	200	5	25	375
$[220-260[$	8	240	45	2025	16200
$[260-300[$	6	280	85	7225	43350
$[300-340[$	2	320	125	15625	31250
المجموع	50	----	----	----	181250

وباستخدام العلاقة (12) نجد أن:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{r} f_i(x_i' - \overline{x})^2$$
$$= \frac{181250}{49} = 3698.98 \Longrightarrow S = \sqrt{3698.98} = 60.82$$

3-محاسن الانحراف المعياري ومساوئه:

آ-محاسن الانحراف المعياري:

1- يأخذ جميع القيم بالحسبان.

2- يعتبر من أدق مقاييس التشتت.

3- يدخل في معظم التحاليل الإحصائية لسهولة التعامل معه رياضياً.

ب-مساوئ الانحراف المعياري:

1- يتأثر بالقيم الشاذة.

2- يصعب حسابه في البيانات الوصفية وفي حالة الجداول المفتوحة.

1 – 9 -مقاييس التشتت النسبية (Measures of relative dispersion):

لقد درسنا في الفقرات السابقة بعض أهم مقاييس التشتت والتي لها وحدات حسب طبيعة الظاهرة المدروسة، وتصلح للمقارنة بين الظواهر التي لها الوحدات نفســها، مثل المقارنة بين الانحراف المعياري لأطوال مجموعة من الطلاب مع الانحراف المعياري لأطوال مجموعة أخرى من الموظفين، وهكذا....

وإذا أردنا المقارنة بين ظاهرتين لكل منها وحدات تختلف عن الأخرى مثل مقارنة الانحراف المعياري لأوزان مجموعة من الأشخاص مع الانحراف المعياري لأطوالهم، فإن المقاييس السابقة للتشتت لا تصلح للمقارنة، وذلك لاختلاف الوحدات،

لأن الانحراف المعياري للأوزان يقاس بالكيلوغرام والأطوال تقاس بالسنتمتر، لذلك دعت الحاجة إلى إيجاد مقياس نسبي لا يعتمد على وحدات القياس نذكر منها:

1 – معامل الاختلاف (Coefficient of Variation):

إن مقاييس التشتت التي عرفناها سابقاً تعتمد جميعها على وحدات القياس المستخدمة في البيانات ولكي نحصل على مقياس لا يعتمد على وحدات القياس المستخدمة نعرف مقياس جديد يسمى معامل الاختلاف أو معامل التغير ويعرّف بالعلاقة التالية:

$$\text{معامل الاختلاف} = \mathrm{C.V.} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} = \frac{S}{\overline{X}} \qquad (13)$$

أم في حالة كون جداول التوزيعات التكرارية مفتوحة لمجموعة من البيانات بأنه للتغلب على ذلك يعرّف معامل الاختلاف باستخدام الربيعات بالعلاقة التالية:

$$\text{معامل الاختلاف} = \mathrm{C.V.} = \frac{r_3 - r_1}{r_3 + r_1} \qquad (14)$$

حيث r_1 هو الربيع الأول أو الربيع الأدنى r_3 هو الربيع الثالث أو الربيع الأعلى.

- يستخدم معامل الاختلاف قياس درجة التفاوت بين المفردات أو البيانات ولا يعتمد على وحدات القياس المستعملة، أي يستخدم في المقارنة بين التغير أو الاختلاف في عدة مجموعات أو توزيعات تكرارية بغض النظر عن وحدات القياس المستعملة مختلفة أو نفسها.

مثال (43): احسب معامل الاختلاف لبيانات المجموعتين التاليتين ثُمَّ بيّن أيهما أكثر تغيراً:

بيانات المجموعة الأولى: $75, 80, 82, 87, 96$.

بيانات المجموعة الثانية: $35, 23, 27, 25, 21, 45, 34$

الحل:

- نحسب معامل الاختلاف للمجموعة الأولى بالشكل التالي:

$$\overline{x}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1i} = \frac{75+80+82+87+96}{5} = 84$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$= \frac{(75-84)^2+(80-84)^2+(82-84)^2+(87-84)^2+(96-84)^2}{4}$$

$$= \frac{81+16+4+9+144}{4} = 63.5 \quad \Longrightarrow S_1 = 7.97$$

وباستخدام العلاقة (13) نجد أن:

$$\text{معامل الاختلاف للتوزيع الأول} = C.V. = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} = \frac{7.97}{84} = 0.09$$

- ثُمَّ نحسب معامل الاختلاف للمجموعة الثانية بالشكل التالي:

$$\overline{x}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{2i} = \frac{35+23+27+25+21+45+34}{7} = 30$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$= \frac{(35-30)^2+(23-30)^2+(27-30)^2+(25-30)^2+(21-30)^2+(45-30)^2+(34-30)^2}{6}$$

$$= \frac{25+49+9+25+81+225+16}{6} = 71.67 \quad \Rightarrow S_2 = 8.47$$

وباستخدام العلاقة (13) نجد أن:

$$\text{معامل الاختلاف للتوزيع الثاني} = C.V. = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} = \frac{8.47}{30} = 0.28$$

نلاحظ أن معامل الاختلاف في بيانات المجموعة الأولى أصغر من معامل الاختلاف في بيانات المجموعة الثانية. أي أن مقدار التفاوت بين بيانات المجموعة الأولى أصغر من مقدار التفاوت بين بيانات المجموعة الثانية.

مثال (43): احسب معامل الاختلاف باستخدام الربيعات لبيانات التوزيعين التكراريين التاليين ثُمَّ بيّن أيهما أكثر تغيراً:

بيانات التوزيع التكراري الأول: $r_1 = 15.65\,, r_3 = 86.35$.

بيانات التوزيع التكراري الثاني: $r_1 = 11.02\,, r_3 = 35.98$.

الحل:

بحساب معامل الاختلاف لكل من التوزيعين فنجد معامل الاختلاف للتوزيع الأول:

$$\text{معامل الاختلاف للتوزيع الأول} = C.V. = \frac{r_3-r_1}{r_3+r_1} = \frac{86.35-15.65}{86.35+15.65} = \frac{70.7}{102} = 0.69$$

ويكون معامل الاختلاف للتوزيع الثاني:

$$\text{معامل الاختلاف للتوزيع الثاني} = C.V. = \frac{r_3-r_1}{r_3+r_1} = \frac{35.98-11.02}{35.98+11.02} = \frac{24.96}{47} = 0.53$$

نلاحظ أن معامل الاختلاف في التوزيع التكراري الأول أكبر من معامل الاختلاف في التوزيع التكراري الثاني. أي أن مقدار التفاوت بين بيانات التوزيع التكراري الأول أكبر من مقدار التفاوت بين بيانات التوزيع التكراري الثاني.

ملاحظة:

عند المقارنة بين قيمتي معامل الاختلاف لبيانات توزيع تكراري باستخدام التعريفين السابقين، فإننا نحصل على جوابين مختلفين، وذلك لاختلاف الأساس الرياضي في كل من التعريفين السابقين، وفي هذه الحالة نفضل استخدام التعريف الأول إذا كانت جداول التوزيعات التكرارية غير مفتوحة وذلك لدقته.

2 – العزوم (The Moments):

يعرف العزم الرائي أو العزم من المرتبة r لمجموعة من البيانات x_1، x_2، ...، x_n حول وسطها الحسابي $\overline{x}$ بالعلاقة التالية:

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^r$$

ويعرف العزم الرائي أو العزم من المرتبة r لمجموعة من البيانات x_1، x_2، ...، x_n حول نقطة الأصل أو حول المبدأ بالعلاقة التالية:

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r$$

يعرف العزم الرائي أو العزم من المرتبة r لمجموعة من البيانات x_1، x_2، ...، x_n موزعة على فئات مراكزها $x'_1, x'_2, \dots, x'_k$ وتكراراتها $f_1, f_2, \dots, f_k$ حول وسطه الحسابي $\overline{x}$ بالعلاقة التالية:

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(x'_i - \overline{x})^r$$

ويعرف العزم الرائي أو العزم من المرتبة r لمجموعة من البيانات x_1، x_2، ...، x_n موزعة على فئات مراكزها $x'_1, x'_2, \dots, x'_k$ وتكراراتها $f_1, f_2, \dots, f_k$ حول نقطة الأصل أو حول المبدأ بالعلاقة التالية:

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i\, {x'_i}^r$$

3 – مقاييس الالتواء (Measures of Skewness):

لقد سبق أن ذكرنا أن أشكال المنحنيات

1 – مقياس الالتواء لبيرسون (*Pearson*):

يعرف معامل بيرسون للالتواء بالعلاقة التالية:

$$\text{Sk} = \frac{(\overline{x} - Mod)}{s}$$

أو بالعلاقة:

$$\text{Sk} = \frac{3\,(\overline{x} - Median)}{s}$$

نلاحظ أن معامل الالتواء لبيرسون يعطي نتائج مقبولة عندما يكون الالتواء بسيطاً، ويعطي نتائج غير مقبولة عندما يكون الالتواء شديداً أو في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة.

2 – مقياس الالتواء لباولي (*Bowley*):

يعرف معامل الالتواء لباولي بالعلاقة التالية:

$$\mathrm{Sk} = \frac{(r_3 - Median) - (Median - r_1)}{(r_3 - Median) + (Median - r_1)}$$

يستخدم معامل التواء باولي في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة والمغلقة.

3 – مقياس الالتواء بطريقة العزوم:

يعرف معامل الالتواء بطريقة العزوم بالعلاقة التالية:

$$\mathrm{Sk} = \frac{m_r}{S^3} = \frac{\text{العزم الثالث المركزي}}{\left(\text{الانحراف المعياري}\right)^3}$$

مثال (45):

4 – معامل التفلطح (Coefficient of Kurtosis):

الفصل الرابع

الارتباط والانحدار

Correlation and Regression

1–الانحدار (Regression):

الانحدار هو طريقة إحصائية حديثة كثير التطبيقات في الحواسيب وهو يحوي على قدرٍ كبير من الخلفية النظرية وتحتاج هذه الطريقة إلى قاعدة جيدة في معرفة استخدام أحد البرامج الإحصائية المعروفة مثل SAS، S، Mathematica، SPSS، وترجع بداية هذا البحث إلى العالم الإنكليزي Sir Galton عام 1900 حيث إن ملكة إنكلترة قد طلبت منه أن يدرس لها تطور الطبقة الارستقراطية في إنكلترة وذلك من خلال دراسة العلاقة الموجودة بين طول الوالد وطول الابن الأكبر في عائلة واحدة. وكان اعتقاده أنه كلما كان الوالد طويلاً كلما كان الابن أشد طولاً ولكن فقد وجد خلاف ذلك تماماً حيث إنه يوجد انحدار نحو المتوسط.

تعريف: الانحدار هو مجموعة من العمليات الرياضية المستخدمة من أجل كشف اللثام عن علاقة بين المتغيرات ولدينا نوعين من المتغيرات، ندعو المتغير الأول y المتغير غير المستقل كما وندعو المتغير الثاني x المتغير المستقل.

لقد تعرفنا في الفقرات السابقة إلى كيفية حساب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت لمجموعة واحدة من البيانات أو أكثر بغية المقارنة فيما بينها، علماً أن الصفة المشتركة التي كانت تمثل هذه المجموعات كانت تعتمد على متغير واحد فقط وهو المتغير المدروس.

ولكن في الحياة العملية قد تكون مفردات العينة عبارة عن أزواج من القيم لخاصتين مختلفتين، كما قد يكون المطلوب في مثل هذه الحالة دراسة العلاقة بينهما ومعرفة ما إذا كان تغير إحدى الظاهرتين مرتبطاً بتغير الأخرى ومن ثُمَّ تحديد نوع العلاقة التي تربطهما، ومقياس قوة هذه العلاقة واتجاهها كأن تكون طردية أو عكسية أو غير ذلك.

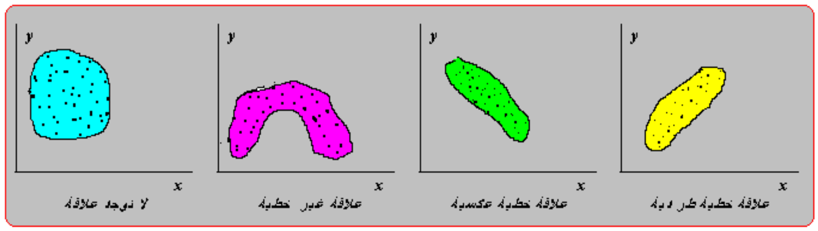
من هذه العلاقات على سبيل المثال دراسة العلاقة بين مستوى الذكاء والعامل الوراثي أو دراسة العلاقة بين الطول والوزن لمجموعة من الأشخاص وهكذا ......

في هذه الفقرة سوف نقوم بدراسة طرائق قياس مقدار العلاقة بين متغيرين مفروضين، مثل قياس قوة الارتباط بينهما وإيجاد مقاييس عددية لقياس قوة الارتباط تربط بين المتغيرين بعضهما ببعض، تمكننا من التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين لقيمة محدودة للمتغير الآخر. وقبل البدء بهذه الدراسة يجب أن نتعرف على أشكال الانتشار والتي تصف العلاقة بين المتغيرات وهي:

1 – إذا كانت نقاط الانتشار منتشرة بشكل عشوائي ومبعثرة، بحيث أن نصيب كل وحدة مساحة بشكل وسطي لا يختلف من مكان لأخر في المستوى أي دون أي نظام فإن مثل هذا الشكل يدل على عدم وجود أية علاقة بين المتغيرين y ، x والشكل اليساري من الشكل التالي يبين ذلك.

2 – إذا كانت نقاط الانتشار في شكل حزمة ذات اتجاه ثابت كأن تكون من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين، وفي هذه الحالة تكون العلاقة بين المتغيرين علاقة عكسية أو سالبة أي أن المتغير y ينقص بزيادة المتغير x والشكل الثالث من الشكل السابق يبين ذلك.

3 – أما إذا كانت نقاط الانتشار منتشرة في شكل حزمة ذات اتجاه ثابت كأن تكون من أعلى اليمين إلى أدنى اليسار، وفي هذه الحالة تكون العلاقة بين المتغيرين علاقة طردية كما في الشكل الرابع من الشكل السابق، أي أن المتغير y يزداد بزيادة المتغير x ونسمي هذا الارتباط بالارتباط الموجب.



يتضح مما تقدم أن إجراء تحليل الارتباط بين سلوك متغيرين أو ظاهرتين يعتمد في الدرجة الأولى على تصور العلاقة القائمة بينهما ومن أجل الحصول على فكرة أولية عن طبيعة العلاقة القائمة بين متغيرين ، نعمد كما رأينا إلى رسم محورين متعامدين ونحدد في الشكل نقاط الانتشار حيث إن الإحداثيات الأفقية تساوي قيم x وهو المتغير المستقل والإحداثيات العمودية التي تناظرها وتساوي قيم y وهو المتغير الدالة ، أي أننا نقوم برسم نقاط في مستوى الإحداثيات الديكارتية وإحداثيات هذه النقاط هي (x_1, y_1)،$(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. وكما رأينا فإن الشكل البياني الذي نحصل عليه يدعى شكل الانتشار، سوف نوضح ذلك في المثال الآتي:

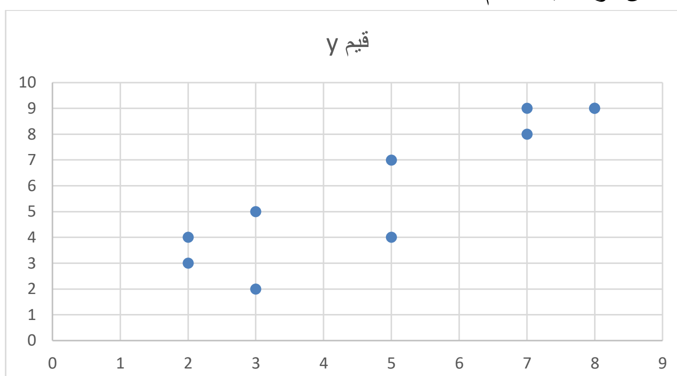
مثـــــال (1): لنأخذ بعين الاعتبار سلوك كل من المتغيرين x و y الذين يرمزان إلى مدة الخدمة الفعلية بالسنوات في المطارات المدنية، وعدد ساعات الطيران بمئات الساعات وذلك لعشرة طيارين والمبينة في الجدول الآتي، ولندرس العلاقة بين الظاهرتين.

مدة الخدمة الفعلية x	3	3	5	2	8	7	7	2	5	8
عدد ساعات الطيران y	2	5	4	3	9	8	9	4	7	9

إذا مثلنا هذه البيانات في مستوي إحداثيات ديكارتية، حيث يدل المحور الأفقي x إلى مدة الخدمة الفعلية بالسنوات ويدل المحور العمودي y إلى عدد ساعات الطيران، ومثلنا كل زوج من القيم بنقطة فاصلتها وترتيبها على الترتيب مدة الخدمة وعدد ساعات الطيران لطيار ما، لحصلنا على مجموعة من النقاط تدعى شكل الانتشار.

من الممكن إيجاد المستقيم الذي يلاءم هذه النقاط على أحسن وجه ووضع معادلتين ويكون بمثابة المحور لهذه السحابة، ويعطينا فكرة عن العلاقة بين الظاهرتين، كما وأنه يمكننا هذا المستقيم عند إيجاده، ورسمه من تقدير قيمة معينة لظاهرة ما إذا عُلمت القيمة الموافقة للظاهرة الأخرى، أي تقدير عدد ساعات الطيران لطيار عُرفت مدة خدمته.

يدعى هذا المستقيم بمستقيم الانحدار كما وأن هناك مقياساً لشدة العلاقة بين الظاهرتين يدعى معامل الارتباط. سوف نكتفي بدراسة معامل الارتباط الخطي وكذلك معادلة الانحدار الخطي بأشكال الانتشار وذلك لمراعاة مستوى وطبيعة تخصصات الدارسين لهذا الكتاب. وسوف نقوم بدراسة معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين (x, y). كما سنحاول تبسيط عرضنا للموضوع كلما أمكن، وذلك باستخدام الأمثلة.



2- معامل الارتباط الخطي لبيرسون:(Pearson's coefficient of correlation)

يستخدم معامل الارتباط الخطي لبيرسون لقياس قوة الارتباط بين متغيرين x , y عندما تكون أزواج القراءات كمية أي رقمية، وسوف نقدم معامل الارتباط الخطي لبيرسون في حالة البيانات غير المبوبة مباشرة، فإذا كان لدينا أزواج القيم للمتغيرين x, y من المجتمع محل الدراسة بالشكل (x_1, y_1)،(x_2, y_2)، ...، (x_n, y_n) فإننا نعرّف معامل الارتباط الخطي لبيرسون والذي نرمز له بالرمز R بالعلاقة الآتية:

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

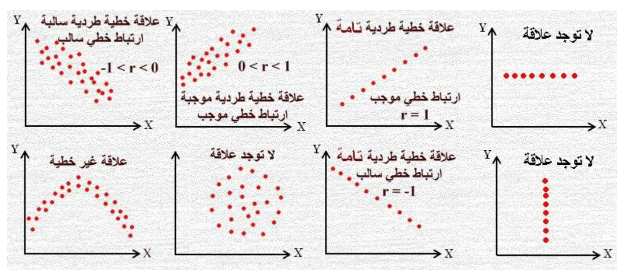
ملاحظة: تجدر الإشارة إلى أنه لا توجد حدود فاصلة تبين قوة وضعف الارتباط، ولكن يمكن وضع حدود تقريبية لقيم R مبنية على الخبرة السابقة، وسوف نذكر ذلك للقيم الموجبة وبالمثل يمكن تطبيقها عندما تكون R سالبة وذلك بتغير إشارة الحدود في الجدول الآتي:

قوة الارتباط	قيم معامل الارتباط R
لا يوجد ارتباط	صفر إلى 0.3
ارتباط ضعيف	0.3 إلى 0.5
ارتباط متوسط	0.5 إلى 0.7
ارتباط قوي	0.7 إلى 0.9
ارتباط قوي جداً	0.9 إلى 1

وبذلك يكون الارتباط في مثال السابق قوياً جداً.

كما وتجدر الإشـارة إلى أن من أهم خصـائصـه أنه لا يعتمد على القيم نفسـها وإنما يعتمد على مقدار تباعد هذه القيم عن بعضها، ولذلك إذا جمعنا أو طرحنا مقداراً ثابتاً من كل قراءات الظاهرتين x أو y فإن قيمة معامل الارتباط لا تتغير.

كما ويتمتع معامل الارتباط بهذه الخاصـة بالنسبة للضرب والقسمة إلا إنه في حالة ضرب أو قسمة مقدار ثابت في كل من x،y فإن قيمة معامل الارتباط لا تتغير بمثل هذه العمليات البسيطة.



ملاحظات: نلاحظ أن قيمة معامل الارتباط هي عبارة عن عدد حقيقي محصـــور بين العددين الصـــحيحين $+1$, -1 .

ونقول عن الارتباط أنه طردي إذا كانت قيمة معامله R موجبة وتزداد قوة الارتباط كلما اقتربت قيمة معامل الارتباط R من الواحد الصـحيح، وتضـعف قيمته كلما اقتربت قيمة معامل الارتباط R من الصـفر، وأنه عكسـي إذا كانت قيمة معامله R ســالبة. كما وتزداد قوة الارتباط العكســي كلما اقتربت قيمة معامل الارتباط R من العدد -1 . وتضــعف قيمته كلما اقتربت قيمة معامل الارتباط R من الصفر.

مـثـــــــال (2): أوجـد مـعـامـل الارتـبـاط الـخـطـي لـبـيـرســون بـيـن مـدة الـخـدمـة بـالســـنـوات x وعدد ساعات الطيران بمئات الساعات y لمجموعة مكونة من عشرة طيارين مدنيين مبينة كما في الجدول التالي:

مدة الخدمة بالسنوات x	3	3	5	2	8	7	7	2	5	8
عدد ساعات الطيران y	2	5	4	3	9	8	9	4	7	9

الحل:

لتسهيل الحسابات ننشئ الجدول التالي:

مدة الخدمة بالسنوات x	عدد ساعات الطيران y	xy	x^2	y^2
3	2	6	9	4
3	5	15	9	25
5	4	20	25	16
2	3	6	4	9
8	9	72	64	81
7	8	56	49	64
7	9	63	49	81
2	4	8	4	16
5	7	35	25	49
8	9	72	64	81
50	60	353	302	426

بالتعويض في قانون الارتباط الخطي نجد:

$$R = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}} = \frac{10(353)-(50)(60)}{\sqrt{[10(302)-(50)^2][10(426)-(60)^2]}}$$

$$= \frac{3530-3000}{\sqrt{(3020-2500)(4260-3600)}} == \frac{530}{\sqrt{(520)(660)}} = \frac{530}{\sqrt{343200}} = \frac{530}{585.8} \not\equiv 0.90$$

3- معامل ارتباط سبيرمان Spearman's Coefficient of Correlation:

نلاحظ من الفقرة الســابقة أن الارتباط الخطي لبيرســون يبين مدى قوة الارتباط بين المتغيرين (x, y) في حالة البيانات الكمية فقط، ولكن في كثير من الدراسات نصادف بيانات وصفيـــة يكون المطلوب فيها إيجاد قوة الارتباط بين المتغيرين الوصفيين.

لذلك دعت الحاجة إلى إيجاد مقياس يستخدم في حالة البيانات الوصفية خاصة إذا أمكن وضعها في صورة ترتيبية، مثل تقديرات الجنود، أو الرتب العسكرية لضباط الجيش، أو المراتب والدرجات لموظفين حسب السلم الوظيفي.

ويمكن ملاحظة أن استخدام معامل ارتباط الرتب لسبيرمان يفيد في مثل حالة هذه البيانات الوصفية السالفة الذكر أو البيانات الكمية كذلك مع مراعاة أن تكون عدد أزواج القيم أقل من 30 حتى يمكن أن يعطي معامل ارتباط الرتب في أغلب الأحيان قوة الارتباط بصورة أكثر دقة من معامل ارتباط بيرسون.

ويُعرّف معامل ارتباط الرتب لسبيرمان r بالعلاقة الآتية:

$$r = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2-1)}$$

حيث إن n عدد المشاهدات، d فرق الرتبة بين المتغيرين.

ولتوضيح طريقة إيجاد رتب مجموعة من الأرقام نتصور أننا رتبنا الأرقام تصاعدياً أو تنازلياً فيكون الرقم الأول رتبته 1 والرقم الثاني رتبته 2 وهكذا ....

وإذا تساوى رقمان فإننا نأخذ متوسط مجموع الرتبتين لهما، ونوضح ذلك باستخدام الترتيب التصاعدي في الأمثلة الثلاثة الآتية، حيث نوضح في المثال (3) كيفية تحديد رتب القراءات، ومن ثُمَّ نطبق ذلك لإيجاد معامل ارتباط الراتب في المثالين الآتيين (4) ، (5) .

مثال (3): أوجد رتب الأعداد الآتية:

6	3	2	9	8	5	3	x

إذا تصورنا ترتيب البيانات تصاعدياً فإن الرقم 2 يحتل المرتبة الأولى (1)، والرقمين 3,3 يحتلان المرتبتين الثانية والثالثة (2 , 3) ، وتكون رتبة كل منهما هي متوســط الرتبتين (2 , 3) أي ((2 + 3) ÷ 2 = 2.5) والرقم 5 يحتل المرتبة الرابعة (4) وهكذا باقي الأرقام.... ونوضح ذلك بالجدول الآتي لقيم س ورتبها.

6	3	2	9	8	5	3	x
5	2.5	1	7	6	4	2.5	رتبة x

ولإيجاد معامل الارتباط للرتب نوضح طريقة حسابه بالمثالين الآتيين:

مثـــال (4): أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان لمدة الخدمة وعدد ساعات الطيران لعينة مكونة من عشرة طيارين حسب البيانات المعطاة في المثال (2) السابق.

الحل: يمكن تلخيص الحسابات كما في الجدول الآتي:

مدة الخدمة بالسنوات x	عدد ساعات الطيران y	رتبة x	رتبة y	d	d^2
3	2	3.5	1	2.5	6.25
3	5	3.5	5	-1.5	2.25
5	4	5.5	3.5	2	4
2	3	1.5	2	-0.5	0.25
8	9	9.5	9	0.5	0.25
7	8	7.5	7	0.5	0.25
7	9	7.5	9	-1.5	2.25
2	4	1.5	3.5	-2	4
5	7	5.5	6	-0.5	0.25
8	9	9.5	9	0.5	0.25
——	——	—	**المجموع**	0	20

حيث d هي: رتبة x − رتبة y = d .

ومن ذلك يمكن حساب معامل الارتباط الخطي لسبيرمان كما يأتي:

$$r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6\,(20)}{10(100-1)} = 1 - \frac{120}{990} = 1 - 0.136 = 0.864$$

وهو ارتباط طردي وقوي.

ملاحظة: إذا حسبنا معامل الارتباط الخطي اعتماداً على طريقة بيرسون فليس من الضروري أن نحصل على النتيجة نفسها عند حسابه اعتماداً على طريقة سيبرمان.

مثـــــال (5): في دراسة اجتماعية عن الوضع المالي لكل من أسرتي الزوج والزوجة لعينة مكونة من خمسة جنود، وذلك لمعرفة تأثير الحالة المادية في الزواج بين أسر الجنود، حيث كانت المعلومات كما في الجدول الآتي:

الحالة المادية لأسرة الجندي x	جيدة	منخفضة	متوسطة	ممتازة	متوسطة
الحالة المادية لأسرة زوجته y	ممتازة	جيدة	جيدة	ممتازة	متوسطة

أي أن المطلوب هو حساب معامل ارتباط الرتب.

نلخص الحل في الجدول الآتي:

أسرة الجندي x	أسرة زوجته y	رتبة x	رتبة y	d	d^2
جيدة	ممتازة	4	4.5	-0.5	0.25
منخفضة	جيدة	1	2.5	-1.5	2.25
متوسطة	جيدة	2.5	2.5	0	0
ممتازة	ممتازة	5	4.5	0.5	0.25
متوسطة	متوسطة	2.5	1	1.5	2.25
ـــــ	ـــــ	ـــــ	المجموع	0	5

$$R = 1 - \frac{6\,\Sigma\, d^2}{n\,(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6\,(5)}{5\,(25 - 1)} = 1 - 0.25 = 0.75$$

أي أنه يوجد ارتباط طردي قوي.

4 – معامل الاقتران (Coefficient of contingency):

لقد سبق أن عرفنا معامل الارتباط لسبيرمان (معامل ارتباط الرتب) للبيانات الوصفية التي يمكن ترتيبها ، ولكن نصادف كثيراً من الدراسات التطبيقية في مختلف أوجه الحياة العملية كعلم النفس علم الاجتماع، العلوم العسكرية، والعلوم الزراعية... إلى آخره، بيانات وصفية ليس في طبيعتها صفة الترتيب أي لا يمكن وضع رتب لها، أو لا معنى للرتب فيها،

نذكر مثلاً التدخين له صفتان مدخن ، أو غير مدخن ، التعليم له صفتان متعلم أو غير متعلم، طبيعة العمل لشخص يعمل ، أو لا يعمل ، طبيعة الجسم يكون سليم ، أو غير سليم ، فصائل الدم تكون مثلاً A , A^+ , B , ...

ولتسهيل مفهوم الاقتران بين صفات متعددة نفرض أن لكل من المتغيرين y ، x صفتين أولى وثانية ويمكن التعبير عن مثل هذه البيانات كما في الجدول الآتي:

المتغير y / المتغير x	الصفة الأولى y_1	الصفة الثانية y_2
الصفة الأولى x_1	***A***	***B***
الصفة الثانية x_2	***C***	***D***

حيث يدل الرمز A عن التكرارات المشتركة في الصفة الأولى x_1 والصفة الأولى y_1 ، وهكذا بالنسبة لبقية الرموز B ، C ، D .

وقد اقترح بيل بأن يُعرّف معامل الاقتران $(C.C.)$ في هذه الحالة بالعلاقة الآتية:

$$C.C.=\frac{AD-BC}{AD+BC}$$

ونوضح طريقة حساب $C.C.$ بالمثال الآتي.

مثال (6): أوجد معامل الاقتران $C.C.$ بين التدخين والتعليم لمجموعة من الأشخاص حيث كانت البيانات كما يأتي:

التدخين y / التعليم x	مدخن	غير مدخن
متعلم	15	10
غير متعلم	9	16

الحل: ومن ذلك يمكن حساب معامل الاقتران كما يلي:

$$C.C.=\frac{AD-BC}{AD+BC}=\frac{15\times16-10\times9}{15\times16+10\times9}=\frac{150}{330}=0.45$$

أي يوجد ارتباط متوسط بين التدخين والتعليم لمجموعة الأشخاص.

5 – معامل التوافق:

استخدم كرامر مقياساً آخراً للارتباط في الحالة التي يكون فيها كلا المتغيرين وصفيين أو أحدهما وصفي والآخر كمي ولكل منهما أكثر من حالة، يدعى معامل التوافق.

أي عندما تتكون الظواهر من عدة صفات لكل متغير وليس صفتين فقط كما في الحالة الأولى حالة معامل الاقتران، أي أننا بصدد تعميم الحالة السابقة.

فإذا فرضنا أن للمتغير الأول x الصفات التالية $x_1, x_2, \dots, x_r$ وأن للمتغير الثاني y الصفات التالية $y_1, y_2, \dots, y_s$ ورمزنا بـ f_{ij} لتكرارات العينة التي لها الصفة i للمتغير الأول x ولها الصفة j للمتغير الثاني y ورتبنا هذه الكميات بالجدول التالي:

الصفة y / الصفة x	الصفة الأولى y_1	الصفة الثانية y_2	…	الصفة y_s	المجموع
الصفة الأولى x_1	f_{11}	f_{12}	…	f_{1s}	$f_{1\bullet}$
الصفة الثانية x_2	f_{21}	f_{22}	…	f_{2s}	$f_{2\bullet}$
…	…	…	…	…	…
الصفة x_r	f_{r1}	f_{r2}	…	f_{rs}	$f_{r\bullet}$
المجموع	$f_{\bullet 1}$	$f_{\bullet 2}$	…	$f_{\bullet s}$	$n = f_{\bullet\bullet}$

$f_{i\bullet}$: مجموع التكرارات في العينة التي لها الصفة i للمتغير الأول x .

$f_{\bullet j}$: مجموع التكرارات في العينة التي لها الصفة j للمتغير الثاني y .

فإن معامل التوافق يعطى بالعلاقة التالية:

$$r_a = \sqrt{\frac{B-1}{B}}$$

علماً أن:

$$B = \frac{f_{11}^2}{f_{1\bullet} f_{\bullet 1}} + \frac{f_{12}^2}{f_{1\bullet} f_{\bullet 2}} + \dots + \frac{f_{rs}^2}{f_{r\bullet} f_{\bullet s}}$$

أي أننا نربع تكرار الخلية الأولى، ونقسمه على حاصل ضرب مجموع التكرارات للصف الذي به الخلية الأولى، بمجموع التكرارات للعمود الذي به الخلية الأولى، وهكذا نحسب بقية حدود B .

مثال (7): أوجد معامل التوافق بين لون العيون x ولون الشعر y لعينة مؤلفة من 45 شخصاً باستخدام البيانات الواردة في الجدول التالي:

لون العيون x \ لون الشعر y	أشقر	بني	أسود	المجموع
أزرق	6	5	4	15
عسلي	3	6	6	15
أسود	2	7	6	15
المجموع	11	18	16	$n = 45$

الحل: لإيجاد معامل التوافق نوجد أولاً B من العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$B = \frac{f_{11}^2}{f_{1\bullet}.f_{\bullet 1}} + \frac{f_{12}^2}{f_{1\bullet}.f_{\bullet 2}} + \cdots + \frac{f_{rs}^2}{f_{r\bullet}.f_{\bullet s}}$$

$$= \frac{(6)^2}{11\times15} + \frac{(5)^2}{18\times15} + \frac{(4)^2}{16\times15} + \frac{(3)^2}{11\times15} + \frac{(6)^2}{18\times15} + \frac{(6)^2}{16\times15} + \frac{(2)^2}{11\times15} + \frac{(7)^2}{18\times15} + \frac{(6)^2}{16\times15}$$

$$= 0.22 + 0.09 + 0.07 + 0.05 + 0.13 + 0.15 + 0.02 + 0.18 + 0.15 = 1.07$$

بالتعويض في علاقة التوافق نجد:

$$r_a = \sqrt{\frac{B-1}{B}} = \sqrt{\frac{1.07-1}{1.07}} = \sqrt{0.065} = 0.25$$

أي يوجد ارتباط ضعيف بين لون الشعر ولون العينين.

مثال (8): يمثل الجدول الآتي أوضاع 280 مدخناً ومصنفة حسب درجة إدمانهم من جهة وإصابتهم بالضغط الشرياني من جهة أخرى:

الضغط الشرياني y \ التدخين x	مدخن بكثرة	مدخن وسط	غير مدخن
مصاب بالضغط الشرياني	30	36	21
غير مصاب بالضغط الشرياني	19	26	148

والمطلوب:

1 – احسب معامل التوافق بين التدخين وارتفاع الضغط الشرياني.

2 – هل تعتقد أن هناك علاقة بين التدخين وارتفاع الضغط الشرياني.

الحل:

المجموع	غير مدخن	مدخن وسط	مدخن بكثرة	التدخين x / الضغط الشرياني y
87	21	36	30	مصاب بالضغط الشرياني
193	148	26	19	غير مصاب بالضغط الشرياني
280	169	62	49	المجموع

1 – لإيجاد معامل التوافق نوجد أولاً B من العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$B=\frac{f_{11}^2}{f_{1\bullet}f_{\bullet 1}}+\frac{f_{12}^2}{f_{1\bullet}f_{\bullet 2}}+\cdots+\frac{f_{rs}^2}{f_{r\bullet}f_{\bullet s}}$$

$$=\frac{(30)^2}{87\times 49}+\frac{(36)^2}{87\times 62}+\frac{(21)^2}{87\times 169}+\frac{(19)^2}{193\times 49}+\frac{(26)^2}{193\times 62}+\frac{(148)^2}{193\times 169}$$

$$=0.211+0.240+0.03+0.038+0.056+0.671=1.208$$

بالتعويض في علاقة التوافق نجد:

$$r_a=\sqrt{\frac{B-1}{B}}=\sqrt{\frac{1.208-1}{1.208}}=\sqrt{0.172}=0.415$$

2 – نستنتج أنه لا يوجد أي ارتباط بين الدخل ومراجعة الطبيب.

3 – خط الانحدار (Regression line):

سبق أن درسنا في هذا الفصل طرائق حساب قيمة معامل الارتباط الخطي بين متغيرين x،y كما تعرفنا على كيفية إيجاد قيمة معامل الاقتران لكارل بيرسون وغيره.

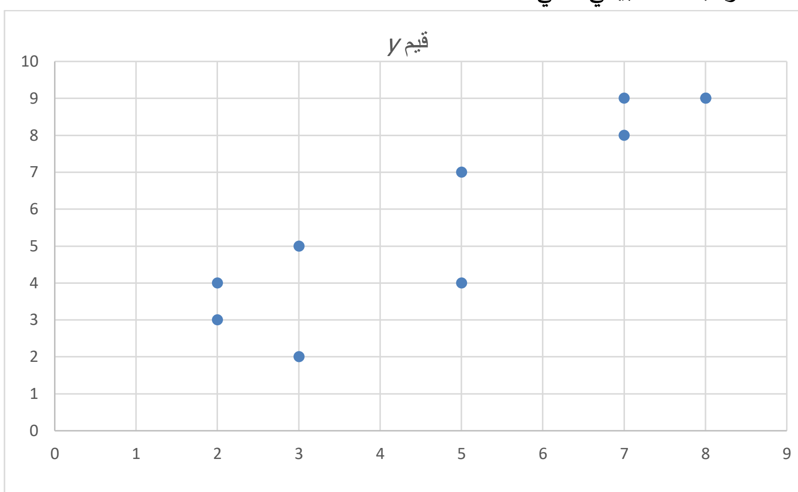
ومن الملاحظ أن جميع المقاييس الســـابقة تبين أو تعطي قوة الارتباط بين أي متغيرين فقط، ولكن إذا كان يود الدارس أو الباحث يرغب اســـتقصــــاءً أو بحثاً لأحد المتغيرين عند معرفة قيمة محددة للمتغير الآخر فإنه لا يمكن اســـتخدام معامل الارتباط أو معاملي الاقتران والتوافق، ولكن لا بد للوصول إلى إيجاد علاقة جبرية محددة بين المتغيرين (x,y).

تسمى عادة العلاقة الرياضية التي تفرض التوقع أو التنبؤ بسلوك أحد المتغيرين عند معرفة الآخر بمعادلة خط الانحدار. وتشير معادلة خط الانحدار إلى انحدار أحد المتغيرين على المتغير الآخر، وسوف ندرس فيما يلي معادلة خط انحدار المتغير y على المتغير x ويمكن تلخيص الصورتين الجبرية والبيانية لخطي الانحدار فيما يأتي:

انحدار y على x :

إن معادلة خط انحدار y على x يعطى بالعلاقة: $y = a + bx$

ويمكن توضيح المقصود بالشكل البياني الآتي:



حيث إن أحد المتغيرين يعتمد على الأخر سواء كان الاعتماد طردياً أو عكسياً.

ويمكن تحديد ورسم خط الانحدار بعدة طرائق: منها تمهيد خط مناسب بعد رسم شكل الانتشار للبيانات الخاصة بالمتغيرين (x, y) وهذه الطريقة تقريبية جداً، ولا تستخدم كثيراً، لأنها تختلف من شخص لآخر، ولهذا كان لابد من إيجاد طريقة لتوفيق خط الانحدار بحيث لا تعتمد على انطباع الأشخاص، ولكن تعتمد على البيانات الخاصة بالمتغيرين (x, y) فقط من المعادلة السابقة. ومن ذلك يمكن تحديد الصيغة الرياضية لخط انحدار y على x بالضبط إذا عُلمت قيمتا الثابتين a ، b الذين يمكن حسابهما باتباع طريقة المربعات الصغرى فنجد مقدر لكل من الثابتين بالشكل التالي:

$$\hat{b} = \frac{n\sum x\,y - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}$$

ونحصل على مقدر المربعات الصغرى لمعادلة الانحدار الخطي بالشكل التالي:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$$

ويسمى الثابت b عادة بمعامل انحدار y على x .

حيث إن a تمثل الجزء الذي يقطعه خط انحدار y على x من محور y .

مثال (8): يبين الجدول التالي نسبة تركيز الكالسيوم في الدم x ونسبة تركيز الكالسيوم في البول y لستة أشخاص من المرضى مقدراً بالملغ لكل 100 سنتمتر مكعب:

نسبة تركيز الكالسيوم في الدم x	15	10	12	11	13	14
نسبة تركيز الكالسيوم في البول y	14	9	8	10	12	13

المطلوب:

1 – أوجد معامل الارتباط الخطي r بينهما.

2 – أوجد معادلة خط انحدار y على x .

3 – أوجد تقديراً لنسبة تركيز الكالسيوم في البول إذا كان نسبة تركيز الكالسيوم في الدم 15.

الحل: 1 – لتسهيل الحسابات ننشئ الجدول التالي:

نسبة تركيز الكالسيوم في الدم x	نسبة تركيز الكالسيوم في البول y	xy	x^2	y^2
15	14	210	225	196
10	9	90	100	81
12	8	96	144	64
11	10	110	121	100
13	12	156	169	144
14	13	182	196	169
75	66	844	955	754

بالتعويض في قانون الارتباط الخطي نجد:

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}} = \frac{6(844) - (75)(66)}{\sqrt{[6(955) - (75)^2][6(754) - (66)^2]}} = 0.858$$

2 – إن معادلة انحدار تركيز الكالسيوم في البول y على نسبته في الدم x هي من الشكل:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}\,x$$

حيث $\hat{a}$،$\hat{b}$ يعطيان بالشكل:

$$\hat{b} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{6(844)-(75)(66)}{6(955)-(75)^2} = 1.0857$$

$$\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\,\overline{x} = 11 - 1.0857(12.5) = -2.57$$

وبالتالي معادلة الانحدار تصبح بالشكل:

$$\hat{y} = -2.57 + 1.0857x$$

3 – إن تقدير نسبة تركيز الكالسيوم في البول إذا كان نسبة تركيز الكالسيوم في الدم 15 هو13.7.

<u>السؤال الأول:</u>

ضع إشارة (✓) أمام العبارة الصحيحة في كل من الأسئلة التالية:

1 – يعرّف علم الإحصاء بأنه العلم الذي يختص:

أ– بالطرائق العلمية لجمع البيانات وتنظيمها وتلخيصها، وعرضها بصورة علمية وتحليلها بغرض الوصول إلى استنتاج النتائج والقوانين التي تحكمها، واتخاذ قرارات سديدة ملائمة لذلك.

ب – بتشخيص المرض ووصف العلاج المناسب.

ج – العلم الذي يختص بجمع وتحليل وتفسير البيانات الكمية.

د – بالعلم الذي يختص بجمع وتصنيف وتبويب الحقائق العددية كأساس لتفسير ووصف ومقارنة الظواهر المختلفة.

2 – اقترح العالم يول yule في تحديد عدد الفئات:

أ – تطبيق المعادلة التالية: $k = 25 \times \sqrt[4]{n}$ ، حيث k هو عدد الفئات، $\sqrt[4]{n}$ هو الجذر الرابع لعدد التكرارات.

ب – تطبيق المعادلة التالية: $k = 2.5 \times \sqrt[4]{n}$ ، حيث k هو عدد الفئات، $\sqrt[4]{n}$ هو الجذر الرابع لعدد التكرارات.

ج – تطبيق المعادلة التالية: $k = n \times \sqrt[4]{2.5}$ ، حيث k هو عدد الفئات، $\sqrt[4]{2.5}$ هو الجذر الرابع للعدد 2.5.

د – تطبيق المعادلة التالية: $k = 2.5 \times \sqrt[n]{n}$ ، حيث k هو عدد الفئات، $\sqrt[n]{n}$ هو الجذر النوني لعدد التكرارات.

3 – يقصد بالمجتمع الإحصائي:

أ – مجموعة من المفردات يتم اختيارها من العينة محل الدراسة بشكل عشوائي.

ب – مجموعة كل القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي.

ج – القائمة التي تحتوي على وحدات المعاينة.

د – مجموعة من الأفراد أو العناصر التي تشترك فيما بينها ببعض الخواص والمميزات.

4 – يعطى الوسيط لمجموعة من البيانات المبوبة بالعلاقة التالية:

أ – $Median = A + \left(\frac{\frac{n}{2}+f_{i-1}\uparrow}{f_i}\right) \times l$

حيث: A : هي الحد الأدنى للفئة الوسيطية، $f_{i-1}\uparrow$: التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الوسيطية.
f_i : التكرار المطلق أو التكرار الأساسي للفئة الوسيطية، l : طول الفئة.

ب – $Median = A + \left(\frac{\frac{n}{2}-f_{i-1}\uparrow}{f_i}\right)$

حيث: A : هي الحد الأدنى للفئة الوسيطية، $f_{i-1}\uparrow$: التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الوسيطية.
f_i : التكرار المطلق أو التكرار الأساسي للفئة الوسيطية، l : طول الفئة.

ج – $Median = A + \left(\frac{\frac{n}{2}-f_{i-1}\uparrow}{f_i}\right) \times l$

حيث: A : هي الحد الأدنى للفئة الوسيطية، $f_{i-1}\uparrow$: التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الوسيطية.
f_i : التكرار المطلق أو التكرار الأساسي للفئة الوسيطية، l : طول الفئة.

د – $Median = A \times \left(\frac{\frac{n}{2} - f_{i-1}\uparrow}{f_i}\right) \times l$

حيث: A : هي الحد الأدنى للفئة الوسيطية، $f_{i-1}\uparrow$: التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الوسيطية.

f_i : التكرار المطلق أو التكرار الأساسي للفئة الوسيطية، l : طول الفئة.

5 – المخطط الصندوقي هو عبارة عن صندوق:

أ – ذي قرنين ممتدين بشكل موازٍ للمحور الشاقولي الذي تتوزع عليه القياسات، وتشير حافتا الصندوق السفلية والعلوية للربيعيين الثاني والثالث على الترتيب.

ب – ذي قرنين ممتدين بشكل موازٍ للمحور الأفقي الذي تتوزع عليه القياسات، وتشير حافتا الصندوق السفلية والعلوية للربيعيين الأول والثالث على الترتيب.

ج – ذي قرنين ممتدين بشكل موازٍ للمحور الشاقولي الذي تتوزع عليه القياسات، وتشير حافتا الصندوق السفلية والعلوية للربيعيين الأول والثالث على الترتيب.

د – ذي قرنين ممتدين بشكل موازٍ للمحور الشاقولي الذي تتوزع عليه القياسات، وتشير حافتا الصندوق السفلية والعلوية للربيعيين الثاني والرابع على الترتيب.

6 – يستخدم مخطط الدائرة لتمثيل البيانات:

أ – الكمية. ب – الكمية والوصفية.

ج – الوصفية. د – الرتبية أو الفتروية.

7 – الوحدات المركبة وهي التي:

أ – يمكن قياسها بواسطة العملات كالليرة السورية والدينار والدولار واليورو ....

ب – يمكن قياسها بواسطة الوزن أو الطول أو الحجم.

ج – تتكون من مقياس أو أكثر مثل ضغط الدم/ ساعة، الميلي غرام/ السنتيمتر مكعب، الكيلو واط/الساعي.

د – غير ذلك.

8 – الوسيط أو المعلمة هو:

أ – وسط البيانات. ب – شيء يميز المجتمع الإحصائي كله.

ج – شيء يميز العينة الإحصائية. د – غير ذلك.

9 – المصدر الرسمي والتاريخي وهو أن تؤخذ البيانات الإحصائية من:

أ – العينة الإحصائية.

ب – السجلات المحفوظة في الهيئات والمؤسسات والوزارات المختلفة أو الهيئات الدولية الأخرى.

ج – القائمة التي تحتوي على البيانات الإحصائية.

د – من جميع الوحدات أو الأفراد الذين لهم علاقة بموضوع الدراسة.

السؤال الثاني:

احسب الوسط الهندسي G لعدد الإجازات نصف السنوية بالأيام لمجموعة مكونة من خمسة موظفين من موظفي جامعة القلمون الخاصة التالية **(مستخدماً أربعة أرقام عشرية):** 12 ، 10 ، 8 ، 6 ، 4 .

الحل:

يعطى الوسط الهندسي لمجموعة من البيانات بالعلاقة التالية:

$$G = \sqrt[n]{x_1 . x_2 \dots x_n}$$
$$= \sqrt[5]{4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12}$$
$$= \sqrt[5]{23040} = 7.46$$

وإذا أخذنا اللوغاريتم العشري للطرفين في العلاقة الأخيرة فإننا نجد:

$$Log G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Log x_i$$
$$= \frac{1}{5}(Log4 + Log6 + Log8 + Log10 + Log12)$$
$$= \frac{1}{5}(0.6021 + 0.7782 + 0.9031 + 1 + 1.0792) = 0.8725$$

ومن جدول اللوغاريتم نجد أن الوسط الهندسي هو: $G = 7.46$

السؤال الثالث:

يبين الجدول التالي سرعة التثفل بالدم مقدرة بالمليمتر في الساعة الأولى لـ 200 مريض في إحدى المشافي العامة، موزعة وفق فئات معينة:

$[15-17[$	$[13-15[$	$[11-13[$	$[9-11[$	$[7-9[$	فئات سرعة التثفل بالدم بالمليمتر
30	50	85	20	15	عدد المرضى

المطلوب: 1 – أوجد كلاً من الوسط الحسابي والمنوال.

2 – مثل هذه البيانات بواسطة المدرج التكراري.

الحل:

$f_i x'_i$	مراكز الفئات x'_i	التكرار f_i	حدود الفئات
120	**8**	**15**	$[7-9[$

$[9-11[$	f_1 20	**10**	**200**
$[11-13[$	f 85	**12**	**1020**
$[13-15[$	f_2 50	**14**	**700**
$[15-17[$	**30**	**16**	**480**
المجموع	200	—	**2520**

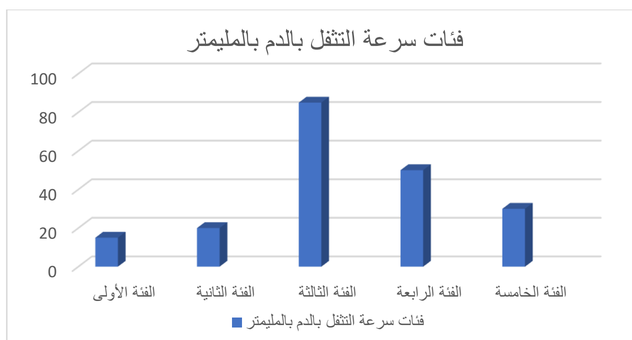
1 – الوسط الحسابي:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} f_i x_i' = \frac{2520}{200} = 12.6$$

المنوال:

$$Mod = A + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times l = 11 + \left(\frac{85-20}{170-20-50}\right) \times 2 = 11 + \left(\frac{130}{100}\right) = 11 + 1.3 = 12.3$$

2 – المدرج التكراري:



ملاحظة : يمكن غض النظر عن بعض الأخطاء الحسابية .